Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 12.07.2010

Höhere Mathematik 2

7. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G19

$$\begin{aligned}\int_G f(x,y)\,d(x,y) &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^y 2xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[x^2 y\right]_{x=\sqrt{y}}^{x=y} dy = \int_0^1 (y^2 y - (\sqrt{y})^2 y\,dy \\ &= \int_0^1 y^3 - y^2\,dy = \left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Aufgabe G20 Wie man anhand einer Zeichnung von G ablesen kann, gilt $r \in [0,1]$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Das transformierte Gebiet ist also $H = \{(r,\varphi) \in [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]\}$. Also ergibt die Substitution in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\int_G e^{-x^2-y^2}\,d(x,y) &= \int_H e^{-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2} \cdot r\,d(r,\varphi) = \int_H re^{-r^2}\,d(r,\varphi) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 re^{-r^2}\,dr\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^1 d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}\right) d\varphi = \left(-\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \approx 0,4965.\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von re^{-r^2} läßt sich durch die Substitution $u(r) = -r^2$ finden.

Aufgabe G21 Das Gebiet G wird in Polarkoordinaten transformiert. Hierfür gilt $r \in [1,2]$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$, das transformierte Gebiet ist also $H = \{(r,\varphi) \in [1,2] \times [0, \frac{\pi}{4}]\}$ und man erhält

$$\begin{aligned}\int_G (x^2 - y^2)\,d(x,y) &= \int_H \big((r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2\big) \cdot r\,d(r,\varphi) = \int_H r^3(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d(r,\varphi) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 r^3(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,dr\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \cdot \left(\int_1^2 r^3\,dr\right) d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi = \frac{15}{4}\left[\sin\varphi\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{15}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot 1\right) = \frac{15}{8}.\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ läßt sich durch zweimalige partielle Integration finden.