Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 28.06.2010

Höhere Mathematik 2

6. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G16

a) Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= x \cdot e^x \cdot e^{-y}, \\
\int e^y \, dy &= \int x e^x \, dx, \\
e^y &= x e^x - \int e^x \, dx + c_1 = x e^x - e^x + c, \\
y(x) &= \ln(x e^x - e^x + c).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
y(0) &= \ln(0 - 1 + c) = 0, \\
c &= 2, \\
y(x) &= \ln(x e^x - e^x + 2).
\end{aligned}$$

Aufgabe G17

a) Die homogene Gleichung $y' - \frac{xy}{x+1} = 0$ löst man mittels Trennung der Variablen

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{xy}{x+1}, \\
\int \frac{1}{y} \, dy &= \int \frac{x}{x+1} \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx, \\
\ln|y| &= x - \ln(x+1) + c_1, \\
y(x) &= \pm e^{c_1} \frac{e^x}{x+1} = c \frac{e^x}{x+1} \text{ mit } c = \pm e^{c_1}.
\end{aligned}$$

b) Ansatz der Variation der Konstanten liefert

$$\begin{aligned}
y_s(x) &= c(x)y_h(x) \text{ mit } y_h(x) = \frac{e^x}{x+1}, \\
e^x &= y_s' - \frac{xy_s}{x+1} = c'y_h + cy_h' - c\frac{xy_h}{x+1} = c'y_h, \\
c' &= \frac{e^x}{y_h} = x+1, \\
c(x) &= \frac{1}{2}x^2 + x, \\
y_s(x) &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\frac{e^x}{x+1}, \\
y(x) &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x + c\right)\frac{e^x}{x+1}.
\end{aligned}$$

c) Es ist $y(0) = c = 5$, also $c = 5$ und die Lösung ist

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 5\right)\frac{e^x}{x+1}.$$

Aufgabe G18

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte zu A:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_2) &= (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4, \\
\lambda_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}, \\
\lambda_1 &= 1, \\
\lambda_2 &= 4.
\end{aligned}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
(A - I_2)x &= 0, \\
x_1 - x_2 &= 0, \\
-2x_1 + 2x_2 &= 0, \\
x_2 &= s \text{ mit } s \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, \\
x_1 &= x_2 = s, \\
x &= s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{aligned}
(A - 4I_2)x &= 0, \\
-2x_1 - x_2 &= 0, \\
-2x_1 - x_2 &= 0, \\
x_1 &= s \text{ mit } s \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, \\
x_2 &= -2x_1 = -2s, \\
x &= s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$y(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned}
y(0) &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \\
c_1 + c_2 &= 1, \\
c_1 - 2c_2 &= 4, \\
3c_2 &= -3, \\
c_2 &= -1, \\
c_1 &= 1 - c_2 = 2.
\end{aligned}$$

$$y(x) = 2e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Hausübungen

Aufgabe H16

a) Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= x \cdot y \cdot (\ln y) \cdot \sin x, \\
\int \frac{1}{y \ln y}\, dy &= \int x \sin x \, dx, \qquad u = \ln y, \\
\int \frac{1}{y \cdot u} \cdot y \, du &= -x \cos x + \int \cos x \, dx + c_1, \\
\ln |u| &= -x \cos x + \sin x + c, \\
\ln |\ln y| &= -x \cos x + \sin x + c, \\
|\ln y| &= e^{-x \cos x + \sin x + c}, \\
\ln y &= \pm e^{-x \cos x + \sin x + c}, \\
y &= e^{\pm e^{-x \cos x + \sin x + c}}, \\
y(x) &= e^{k \cdot e^{-x \cos x + \sin x}} \text{ mit } k = \pm e^c.
\end{aligned}$$

Anmerkung: Eine weitere Lösung der Differentialgleichung ist die konstante Lösung $y(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

b)

$$\begin{aligned}
y(0) &= e^k = e^{-2}, \\
k &= -2, \\
y(x) &= e^{-2 \cdot e^{-x \cos x + \sin x}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H17

a) Die homogene Gleichung $y' = (\cos x) y$ löst man mittels Trennung der Variablen

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (\cos x) y, \\
\int \frac{1}{y}\, dy &= \int \cos x \, dx, \\
\ln |y| &= \sin(x) + c_1, \\
y(x) &= c \cdot e^{\sin x}.
\end{aligned}$$

b) Ansatz der Variation der Konstanten liefert

$$\begin{aligned}
y_s(x) &= c(x)e^{\sin x}, \\
x^2e^{\sin x} &= y_s' - (\cos x)y_s = c'e^{\sin x} + c(\cos x)e^{\sin x} - c(\cos x)e^{\sin x} = c'e^{\sin x}, \\
c' &= x^2, \\
c(x) &= \frac{1}{3}x^3, \\
y_s(x) &= \frac{1}{3}x^3e^{\sin x}, \\
y(x) &= \left(\frac{1}{3}x^3 + c\right)e^{\sin x}.
\end{aligned}$$

c) Es ist $y(0) = c = 5$, also $c = 5$ und die Lösung ist

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 5\right)e^{\sin x}.$$

Aufgabe H18 Das charakteristische Polynom der Matrix ist $P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2)$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Mit Hilfe des Gauß-Verfahrens ergeben sich die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1v_1e^x + c_2v_2e^{\sqrt{2}x} + c_3v_3e^{-\sqrt{2}x}$.