Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 14.06.2010

Höhere Mathematik 2

5. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G13

- A_1 und A_6 sind positiv semidefinit (Eigenwerte ≥ 0).
- A_2 ist positiv definit (Unterminoren > 0).
- A_8 ist negativ semidefinit (siehe Diagonaleinträge).
- Die restlichen Matrizen sind indefinit, zum Beispiel gilt für A_3: $\langle A_3 e_1, e_1 \rangle = 4 > 0$, aber $\langle A_3(e_1 - e_2), e_1 - e_2 \rangle = -1 < 0$.

Aufgabe G14

a) Als erstes werden die partiellen Ableitungen von h bis einschließlich 2. Ordnung bestimmt:

$$\begin{aligned} h_x(x,y) &= -2x, \quad h_y(x,y) = -2y, \\ h_{xx}(x,y) &= -2 = h_{yy}(x,y), \quad h_{xy} = 0 = h_{yx}. \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für die Existenz von Extrema ist $\nabla h(x,y) = 0$. Das zugehörige Gleichungssystem wird gelöst,

$$\nabla h(x,y) = (-2x, -2y) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0,$$

und als kritischer Punkt von h ergibt sich $(0,0)$. Für die hinreichende Bedingung betrachte die Hesse-Matrix

$$H_h(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese hat den einzigen Eigenwert -2 und ist somit negativ definit. Also hat h in $(0,0)$ ein lokales Maximum.

b) Als erstes werden die partiellen Ableitungen von h bis einschließlich 2. Ordnung bestimmt:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (-x+3)e^{-x+y}, \quad f_y(x,y) = (x-2)e^{-x+y}, \quad f_{xx}(x,y) = (x-4)e^{-x+y}, \\ f_{yy}(x,y) &= (x-2)e^{-x+y}, \quad f_{xy} = (-x+3)e^{-x+y} = f_{yx}(x,y). \end{aligned}$$

Setze $\nabla f(x,y) = 0$. Es gilt:

$$((-x+3)e^{-x+y}, (x-2)e^{-x+y}) = (0,0) \Leftrightarrow x = 3 \text{ und } x = 2.$$

Dies ist ein Widerspruch, also besitzt f keine Extrema.
Die Hesse-Matrix von f ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (x-4)e^{-x+y} & (-x+3)e^{-x+y} \\ (-x+3)e^{-x+y} & (x-2)e^{-x+y} \end{pmatrix}.$$

Eine Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Unterminoren positiv sind. Damit $H_f(x,y)$ positiv definit ist, muß somit gelten:

$$\begin{array}{rcl} (x-4)e^{-x+y} > 0 & \text{und} & (x-4)(x-2)e^{-2x+2y} - (-x+3)^2 e^{-2x+2y} > 0 \\ \Leftrightarrow x-4 > 0 & \text{und} & (x-4)(x-2) - (-x+3)^2 > 0 \\ \Leftrightarrow x > 4 & \text{und} & x^2 - 6x + 8 - (x^2 - 6x + 9) > 0 \\ \Leftrightarrow x > 4 & \text{und} & -1 > 0. \end{array}$$

Also ist die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$ nirgends positiv definit.

Aufgabe G15 Lagrangefunktion:

$$L(x,y,\lambda) = \exp(x+2y) + \lambda(x^2+y^2-4).$$

Ableitungen werden 0 gesetzt:

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= \exp(x+2y) + 2\lambda x = 0, \\ L_y(x,y,\lambda) &= 2\exp(x+2y) + 2\lambda y = 0, \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Für $\lambda \neq 0$ folgt aus den ersten beiden Gleichungen $y = 2x$ und mit der dritten Gleichung erhält man

$$\begin{array}{rcl} x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} & \text{und} & y_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}, \\ x_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}} & \text{und} & y_2 = -\frac{4}{\sqrt{5}}. \end{array}$$

Weiterhin ist $f(x_1, y_1) = \exp(10/\sqrt{5})$ (Maximum) und $f(x_2, y_2) = \exp(-10/\sqrt{5})$ (Minimum).

Die Nebenbedingung beschreibt einen Kreis in der xy-Ebene um den Ursprung mit Radius 2.

Hausübungen

Aufgabe H13 Nach Satz 7.18 reicht es zu untersuchen wann die Unterminoren positiv sind:

$$|1| = 1 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 > 0 \to a \in (-1,1),$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} &= 1 + 2a^3 - 3a^2 = (1-a^2) - 2a(a-a^2) = (1+a)(1-a) - 2a^2(1-a) \\ &= (1-a)(1+a-2a^2) = (1-a)^2(1+2a) > 0 \\ &\to a \neq 1 \text{ und } 1 > -2a \to a \in (-1/2, \infty) \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Also ist A für $a \in (-1/2, 1)$ positiv definit.

Aufgabe H14 Es ist $f_x(x,y) = 9x^2 - 9$ und $f_y(x,y) = 2y - 6$. (x,y) ist genau dann ein kritischer Punkt von f, falls $f_x(x,y) = 0 = f_y(x,y)$. Löse also

$$(9x^2 - 9, 2y - 6) = (0,0) \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1, y = 3.$$

Die kritischen Punkte sind also $P_1 = (-1,3)$ und $P_2 = (1,3)$. Um herauszufinden, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt, berechne die Hesse-Matrix H_f an den Punkten P_1 und P_2 und untersuche ihre Eigenwerte:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 18x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$H_f(P_1)$ hat die Eigenwerte -18 und 2, ist also indefinit und damit ist P_1 ein Sattelpunkt von f. $H_f(P_2)$ hat die Eigenwerte 18 und 2, ist also positiv definit und damit ist P_2 ein lokales Minimum von f.

Aufgabe H15 Die Lagrangefunktion lautet

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1).$$

Ableitungen werden auf 0 gesetzt:

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= y + 2\lambda x = 0, \\ L_y(x,y,\lambda) &= x + 4\lambda y = 0, \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + 2y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Fall 1: $\lambda = 0$. Aus $\lambda = 0$ folgt $x = y = 0$ im Widerspruch zur dritten Gleichung.

Fall 2: $\lambda \neq 0$. Aus Gleichung 1 ergibt sich $y = -2\lambda x$, Gleichung 2 ergibt $y = -\frac{1}{4\lambda}x$. Also erhält man $\lambda^2 = \frac{1}{8}$ (d.h. $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$) und $y^2 = \frac{1}{2}x^2$. Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, erhält man $2x^2 = 1$. Somit ergeben sich folgende Kandidaten für die lokalen Extrema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad &\text{und} \quad y_1 &= \frac{1}{2}, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad &\text{und} \quad y_2 &= -\frac{1}{2}, \\ x_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad &\text{und} \quad y_3 &= \frac{1}{2}, \\ x_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad &\text{und} \quad y_4 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $f(x_1,y_1) = f(x_4,y_4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $f(x_2,y_2) = f(x_3,y_3) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Damit sind (x_1,y_1) und (x_4,y_4) die Maximalstellen, (x_2,y_2) und (x_3,y_3) die Minimalstellen.

Die Nebenbedingung beschreibt eine Ellipse in der xy-Ebene um den Ursprung mit den Halbachsen der Längen 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$.