Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 31.05.2010

Höhere Mathematik 2

4. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G10

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3\cdot 5\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot(-4) + 9\cdot 7\cdot 3 - 9\cdot 5\cdot(-4) - 3\cdot 2\cdot 3 - 2\cdot 7\cdot 0 \\ &= 0 - 16 + 189 + 180 - 18 - 0 = 335.\end{aligned}$$

Entwickeln nach der ersten Spalte ergibt

$$\begin{aligned}\det B &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -16 - 16 + 32 = 0.\end{aligned}$$

Aufgabe G11

$$\det(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 6 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(5-\lambda)-(-2)\cdot 6 = \lambda^2-3\lambda+2 = (\lambda-1)(\lambda-2).$$

Also sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A. Als nächstes soll zu jedem Eigenwert ein Eigenvektor bestimmt werden. Die Eigenvektoren von A sind die Lösungen $x_i \neq 0$ der Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i I_2)\cdot x_i = 0,$$

wobei $i = 1, 2$. Die folgenden Fälle werden nun unterschieden:

- $\underline{\lambda_1 = 1}$:

$$(A - \lambda_1 I_2)\cdot x_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Durch Raten oder die Anwendung des Gauß-Verfahrens erhält man den Vektor

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\underline{\lambda_2 = 2}$:

$$(A - \lambda_2 I_2)\cdot x_2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Durch Raten oder die Anwendung des Gauß-Verfahrens erhält man den Vektor

$$x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G12

$$\begin{aligned}
|B-\lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -4\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -16(1-\lambda) + (1-\lambda)((1-\lambda)^2) - 6) \\
&= (1-\lambda)(-16 + (1-\lambda)^2 - 6) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 21).
\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind damit $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{22}$. Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich wie folgt:

- $\underline{\lambda_1 = 1}$:

$$(B-\lambda_1 I_3)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Daraus ergibt sich $y = 0$ und $x = -\frac{4}{3}z$ und damit kann man $(-\frac{4}{3}, 0, 1)^T$ als Eigenvektor wählen, so daß $\{\alpha\cdot(-\frac{4}{3}, 0, 1)^T | \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ die Menge aller Eigenvektoren ist.

- $\underline{\lambda_2 = 1 + \sqrt{22}}$:

$$(B-\lambda_2 I_3)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{22} & 2 & 0 \\ 3 & -\sqrt{22} & 4 \\ 0 & 4 & -\sqrt{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Daraus ergibt sich $x = \frac{2}{\sqrt{22}}y$ und $y = \frac{\sqrt{22}}{4}z$ und damit kann man $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\sqrt{22}, 1)^T$ als Eigenvektor wählen, so daß $\{\alpha\cdot(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\sqrt{22}, 1)^T | \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ die Menge aller Eigenvektoren ist.

- $\underline{\lambda_2 = 1 - \sqrt{22}}$:

$$(B-\lambda_2 I_3)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{22} & 2 & 0 \\ 3 & \sqrt{22} & 4 \\ 0 & 4 & \sqrt{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Daraus ergibt sich $x = -\frac{2}{\sqrt{22}}y$ und $y = -\frac{\sqrt{22}}{4}z$ und damit kann man $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{22}, 1)^T$ als Eigenvektor wählen, so daß $\{\alpha\cdot(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{22}, 1)^T | \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ die Menge aller Eigenvektoren ist.

Hausübungen

Aufgabe H10 Entwickeln nach der zweiten Zeile ergibt

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -2\cdot 4 + 2\cdot(2-1) - 3\cdot(-2) = -8 + 2 + 6 = 0.
\end{aligned}$$

Entwickeln nach jeweils zweiter Spalte ergibt

$$\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = b \cdot b \cdot \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} \\
&= b^2(b^2-1) - (b^2-1) = ((b+1)(b-1))^2 = (b+1)^2(b-1)^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe H11

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6 & -11 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-\lambda)^2(6-\lambda) + 0 + 6 \cdot 1^2 - 0 - (-11) \cdot 1 \cdot (-\lambda) - 0 \\
&= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda).
\end{aligned}$$

Also sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ die Eigenwerte von A. Als nächstes soll zu jedem Eigenwert ein Eigenvektor bestimmt werden. Die Eigenvektoren von A sind die Lösungen $x_i \neq 0$ der Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i I_3) \cdot x_i = 0,$$

wobei $i = 1, 2, 3$. Die folgenden Fälle werden nun unterschieden:

- $\underline{\lambda_1 = 1}$:

$$(A - \lambda_1 I_3) \cdot x_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix} \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Durch Raten oder die Anwendung des Gauß-Verfahrens erhält man den Vektor

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\underline{\lambda_2 = 2}$:

$$(A - \lambda_2 I_3) \cdot x_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Durch Raten oder die Anwendung des Gauß-Verfahrens erhält man den Vektor

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- $\underline{\lambda_3 = 3}$:

$$(A - \lambda_3 I_3) \cdot x_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix} \cdot x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Durch Raten oder die Anwendung des Gauß-Verfahrens erhält man den Vektor

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H12 Für das charakteristische Polynom der Matrix B ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -26 & 3-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
=& \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & 1 \\ -26 & 3-\lambda & 5 \\ 2 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot (-1-\lambda) \\
=& ((-4-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + 78 - 2(3-\lambda) + 15(-4-\lambda)) \cdot (-1-\lambda) \\
=& (-\lambda^3 + 13\lambda - 12 + 78 - 6 + 2\lambda - 60 - 15\lambda) \cdot (-1-\lambda) \\
=& \lambda^3(1+\lambda)
\end{aligned}$$

und somit sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -1$ die Eigenwerte von B.

- $\underline{\lambda_1 = 0}$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ -26 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Durch die Anwendung des Gauß-Verfahrens erhält man bspw. den Vektor

$$x_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

  so daß $\{\alpha \cdot (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, 1)^T | \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ die Menge aller Eigenvektoren ist.

- $\underline{\lambda_2 = -1}$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -26 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Durch die Anwendung des Gauß-Verfahrens erhält man $\{\alpha \cdot (0,0,1,0)^T | \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ als Menge aller Eigenvektoren.