Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 03.05.2010

Höhere Mathematik 2

2. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G4 Für alle Punkte $(x, y) \neq (0, 0)$ ist die Stetigkeit aus der Vorlesung klar. Für die Untersuchung, ob f stetig in $(0, 0)$ ist, wähle eine Nullfolge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n, y_n)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_n^3}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right| \leq \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_n^3}{\sqrt{x_n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| x_n^2 \right| = 0.$$

Dies beweist die Stetigkeit von f.

Aufgabe G5

a) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{2xy(x^2 + y^2) - x^2y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_y(x, y) &= \frac{x^2(x^2 + y^2) - x^2y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

Für $(x, y) = (0, 0)$ gilt:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{\theta\to 0} \frac{f(\theta, 0) - f(0, 0)}{\theta} = 0, \\ f_y(0, 0) &= \lim_{\theta\to 0} \frac{f(0, \theta) - f(0, 0)}{\theta} = 0. \end{aligned}$$

Untersuchung von f_x auf Stetigkeit:
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Nullfolgen mit $x_k = y_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |f_x(x_n, y_n)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2x_n^4}{4x_n^4} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2},$$

also ist f_x nicht stetig in $(0, 0)$ und somit f in $(0, 0)$ nicht stetig differenzierbar.

b) Falls f total differenzierbar in $(0, 0)$ ist, so muß mit Satz 4.5

$$Df(0, 0) = J_f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0)) = (0, 0)$$

gelten, also mit $h = (h_1, h_2)^T$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(h_1, h_2) - f(0, 0) - J_f(0, 0)h|}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{|f(h_1, h_2)|}{|h|} = 0.$$

Für $h_1 = h_2 \neq 0$ gilt jedoch

$$\frac{|f(h_1,h_2)|}{|h|} = \frac{|\frac{h_1^3}{2h_1^2}|}{|\sqrt{h_1^2+h_2^2}|} = \frac{|h_1|}{|2\sqrt{2}h_1|} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

also $\lim_{h\to 0} \frac{|f(h_1,h_2)|}{|h|} \neq 0$. Also ist die Annahme, f sei in $(0,0)$ total differenzierbar falsch.

Aufgabe G6

a)

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 2x - 3y - y^2z^3, \\ f_y(x,y,z) &= -3x + 4z - 2xyz^3, \\ f_z(x,y,z) &= 4y - 3xy^2z^2, \end{aligned}$$

d.h. alle partiellen Ableitungen erster Ordnung existieren.

$$\nabla f(x,y,z) = (2x - 3y - y^2z^3, -3x + 4z - 2xyz^3, 4y - 3xy^2z^2),$$

d.h. im Punkt $(1,1,1)$ ist die Ableitung $(-2,-1,1)$.

$$f_{xy}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -3 - 2yz^3$$

ist stetig. Da sich f_x, f_y, f_z als Polynome bzgl. jeder Variablen x,y,z schreiben lassen, folgt mit Hilfe des Satzes von Schwarz $f_{xy} = f_{yx}$.

b)

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

Hausübungen

Aufgabe H4 Die Funktion $g(x,y) = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}$ ist in $(0,0)$ nicht stetig, da $g(0,0) = 1$, aber der Grenzwert in $(0,0)$ nicht existiert. Um das zu zeigen, wähle zwei Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)^T, \qquad y_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)^T.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}\right) = 2$$

und

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{0}{\frac{1}{n} + 0}\right) = 1.$$

Wegen $2 \neq 1$ ist g in $(0,0)$ nicht stetig und die Stetigkeit kann auch durch keinen reellen Wert für $g(0,0)$ hergestellt werden.

Aufgabe H5 Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$$\begin{aligned} h_x(x,y) &= \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^4}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}, \\ h_y(x,y) &= \frac{-x^3y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}. \end{aligned}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ sind die partiellen Ableitungen stetig, somit ist h total differenzierbar in $(x,y) \neq (0,0)$.
Für $(x,y) = (0,0)$ gilt:

$$\begin{aligned} h_x(0,0) &= \lim_{\theta\to 0} \frac{h(\theta,0)-h(0,0)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta^3}{\theta} = 0, \\ h_y(0,0) &= \lim_{\theta\to 0} \frac{h(0,\theta)-h(0,0)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{0}{\theta} = 0. \end{aligned}$$

Setze deshalb $Dh(0,0) = (0,0)$, so dass mit $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\frac{|h(x,y)-h(0,0)-(0,0)(x,y)^T|}{|(x,y)|} = \frac{|x^3|}{x^2+y^2} \leq |x| \to 0$$

für $(x,y) \to (0,0)$. Also ist h in $(0,0)$ total differenzierbar.

Aufgabe H6

a)

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y\sinh(xy) & x\sinh(xy) \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(y)\cos(z) & x\cos(y)\cos(z) & -x\sin(y)\sin(z) \\ \sin(y)\sin(z) & x\cos(y)\sin(z) & x\sin(y)\cos(z) \\ \cos(y) & -x\sin(y) & 0 \end{pmatrix}.$$