Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 19.04.2010

Höhere Mathematik 2

1. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G1

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 11 & 4 & -9 & -22 \\ -1 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 24 & 15 & 3 & -9 \\ 4 & 5 & 2 & -13 & -24 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ +\frac{1}{2}\cdot \text{Zeile 1} \\ +\frac{3}{2}\cdot \text{Zeile 1} \\ -2\cdot \text{Zeile 1} \end{array}$$

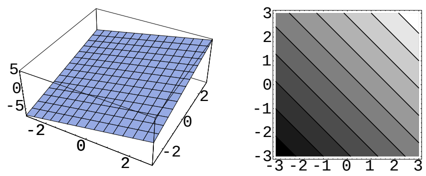
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 11 & 4 & -9 & -22 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & -\frac{5}{2} & -10 \\ 0 & \frac{81}{2} & 21 & -\frac{21}{2} & -42 \\ 0 & -17 & -6 & 5 & 20 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ -81\cdot \text{Zeile 2} \\ +34\cdot \text{Zeile 2} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 11 & 4 & -9 & -22 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & -\frac{5}{2} & -10 \\ 0 & 0 & -384 & 192 & 768 \\ 0 & 0 & 164 & -80 & -320 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ +\frac{164}{384}\cdot \text{Zeile 3} \end{array}$$

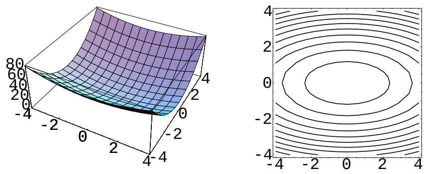
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 11 & 4 & -9 & -22 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & -\frac{5}{2} & -10 \\ 0 & 0 & -384 & 192 & 768 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{8}{2} = 4, \\ x_3 &= \frac{1}{-384}\cdot(768 - 192\cdot 4) = 0, \\ x_2 &= \frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\left(-10 - 5\cdot 0 - \left(-\frac{5}{2}\right)\cdot 4\right) = 0, \\ x_1 &= \frac{1}{2}\cdot(-22 - 11\cdot 0 - 4\cdot 0 - (-9)\cdot 4) = 7. \end{aligned}$$

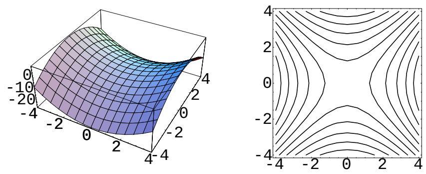
Aufgabe G2



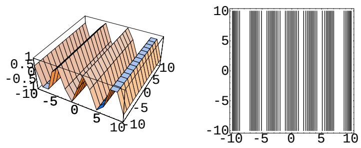
$(x, y) \mapsto x + y - 1$



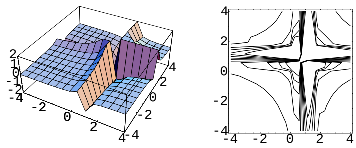
$(x, y) \mapsto x^2 + 4y^2$



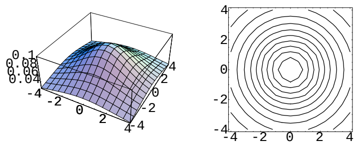
$(x, y) \mapsto x^2 - y^2 - 8$



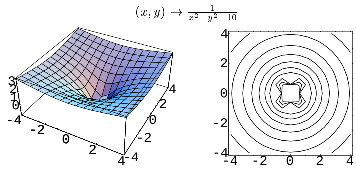
$(x, y) \mapsto \sin(x)$



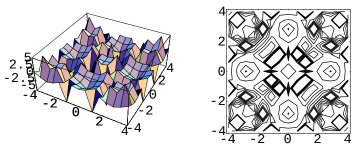
$(x, y) \mapsto \frac{1}{(1-x)(1-y)}$



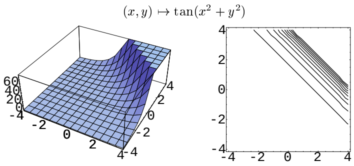
$(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+10}$



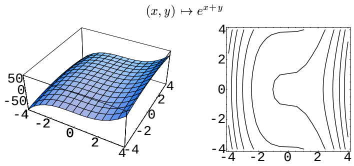
$(x, y) \mapsto \log(x^2 + y^2)$



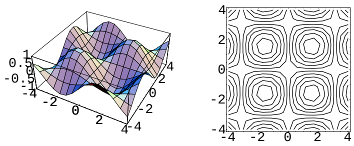
$(x, y) \mapsto \tan(x^2 + y^2)$



$(x, y) \mapsto e^{x+y}$



$(x, y) \mapsto x^3 - y^2 + 4$



$(x, y) \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y)$

Aufgabe G3

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt und damit auch nicht konvergent.

ii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}, \frac{n}{1+n}\right)^T = (0,1)^T$, also ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und beschränkt in $\mathbb{R}^2$.

iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, also sowohl beschränkt, als auch konvergent.

iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, jedoch nicht konvergent.

Hausübungen

Aufgabe H1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & 4 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ -1 \cdot \text{Zeile } 1 \\ -4 \cdot \text{Zeile } 1 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ -2 \cdot \text{Zeile } 2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \lambda, \\ x_2 &= \frac{1}{-4} \cdot (-2 - 2\lambda) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\lambda, \\ x_1 &= \frac{1}{1} \cdot (1 - 4x_2) = -2 - 2\lambda. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also $\{(-2-2\lambda, \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\lambda, \lambda)^T \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe H2

a) i) Zum einen gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$.

Beweis: Es sei ein beliebiges $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ und für $n \geq n_0$ gilt

$$\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - 1\right| = \left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Zum anderen gilt

$$\frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{n}{2}.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt und damit nicht konvergent in $\mathbb{R}^2$.

ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, also sowohl beschränkt, als auch konvergent.

Aufgabe H3 Für alle Punkte $(x, y) \neq (0, 0)$ ist die Stetigkeit aus der Vorlesung klar. Für die Untersuchung, ob f stetig in $(0, 0)$ ist, wähle eine Nullfolge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n, y_n)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_n^3 y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_n^3 y_n^2}{y_n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} |x_n^3| = 0.$$

Dies beweist die Stetigkeit von f.