Fachbereich Mathematik
M. Geißert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2010
09.07.2010

12. Übungsblatt zur PDG I

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es sei $n \geq 2$ und $1 \leq p < \infty$, sowie $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ der Halbraum und für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $x = (x', x_n)$ mit $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Wir wollen $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ Funktionen am Rand von $\mathbb{R}^n_+$ auswerten. Beweisen Sie dazu die folgende Aussagen:

(a) Für alle $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ gilt

$$u(x', 0) = -\int_0^\infty \frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n}\, \mathrm{d}x_n.$$

(b) Für alle $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ gilt $\|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$.

(c) **(Spursatz)** Es gibt eine eindeutige stetige lineare Abbildung $\Gamma_{\mathbb{R}^n_+} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \to L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $\Gamma_{\mathbb{R}^n_+} u = u|_{\partial\mathbb{R}^n_+}$ für $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$.

Aufgabe G2

Beweisen Sie Theorem XIV.9.

Aufgabe G3

Sei $n \geq 2$ und $f_1, \ldots, f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $1 \leq i \leq n$ setze für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\widetilde{x}_i := (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \text{und } f(x) = f_1(\widetilde{x}_1) f_2(\widetilde{x}_2) \cdots f_n(\widetilde{x}_n).$$

Zeigen Sie, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

gilt.

Aufgabe G4

Finden Sie ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, für das *kein* Fortsetzungsoperator existiert.

Aufgabe G5

Vervollständigen Sie den Beweis von Theorem XIV.3.