Fachbereich Mathematik
M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
02.07.2010

11. Übungsblatt zur PDG I

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $A : D(A) \to X$ ein sektorieller Operator mit $\Theta_S > \frac{\pi}{2}$. Zeigen Sie, dass $z \mapsto A^k e^{Az}$, $z \in \Sigma_{0,\theta}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und geegnetes θ holomorph ist. Bestimmen Sie die Operatornorm in Abhängigkeit von z.

Aufgabe G2

Für $t > 0$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ sei

$$f_t(z) := (-z)^\alpha e^{zt}.$$

Weiter sei $A : D(A) \to X$ ein sektorieller Operator mit $K = 0$, $\Theta_S > \frac{\pi}{2}$. Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ die Funktion $f_t(A)$ wohldefiniert ist. Geben Sie gegebenfalls die Operatornorm von $f_t(A)$ in Abhängigkeit von t an.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst einen geeigneten Weg Γ.

Aufgabe G3

Sei $A : D(A) \to X$ ein sektorieller Operator mit $K = 0$. Zeigen Sie

$$\lim_{t \to 0} AR(t, A)x = -x, \quad x \in X.$$

Aufgabe G4

Sei $p \in (1, \infty)$ und $\Delta : W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ der Laplace-Operator. Weiter sei $f \in \mathcal{H}_a(\overline{\Sigma_{0,\theta}}^c)$ für geeignetes $\theta \in (0, \pi)$. Zeigen Sie

$$f(\Delta)x = \mathcal{F}^{-1} f(-|\xi|^2)\mathcal{F}x, \quad x \in S(\mathbb{R}^n).$$

Welche Aussage lässt sich damit über die Operatornorm von $f(A)$ treffen? Wenden Sie dieses Ergebnis auf gebrochene Potenzen des Laplace-Operators an.

Aufgabe G5

Sei $A : D(A) \to X$ ein sektorieller Operator mit $\Theta_S > \frac{\pi}{2}$, $K = 0$ und $0 \in \rho(A)$. Zeigen Sie $(-A)^\alpha \in \mathcal{L}(X)$ für Re $\alpha < 0$.