Fachbereich Mathematik
M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
28.05.2010

6. Übungsblatt zur PDG I

Gruppenübung

Aufgabe G1

Berechnen Sie $\mathcal{F}^{-1}\mathrm{e}^{-|\cdot|^2 t}$ für $t > 0$.

Aufgabe G2

Sei k der Wärmeleitungskern (vgl. Theorem IX.2) und

$$(T(t)f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} k(t, x-y) f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie

(a) $T(t) \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$, $t > 0$, $p \in [1, \infty]$.

(b) $\lim_{t \searrow 0} T(t)f = f$ für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty)$.

(c) $T(t)T(s)f = T(t+s)f$ für $t, s > 0$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$. Wieso kann man diese Eigenschaft erwarten?

(d) Gilt $T(z) \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$ auch für $z \in \mathbb{C}$? Überprüfen Sie das Abbildungsverhalten mit der Young'schen Ungleichung.

Zusammen mit $T(0) := Id$ bildet $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$, $p \in [1, \infty]$ eine *Halbgruppe*, d.h. (a) und (c) gelten. Die Eigenschaft in (b) heißt *starke Stetigkeit*. Falls diese erfüllt ist, sagen wir $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ist eine *stark stetige* Halbgruppe oder c_0-*Halbgruppe*. Falls $\{T(z)\}_{z \in \Sigma_\theta \cup 0} \subset \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$ für ein $\theta > 0$, so heißt $\{T(z)\}_{z \in \Sigma_\theta \cup 0}$ *holomorphe* Halbgruppe.

Aufgabe G3

Übertragen und Beweisen Sie Theorem IX.3 auf den Fall $n = 1$.

Aufgabe G4

Sei $p \in (1, \infty)$ und

$$L^p(\mathbb{R}^n)_+ := \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : f \geq 0 \text{ f. ü. }\}.$$

Zeigen Sie, dass $L^p(\mathbb{R}^n)_+$ schwach abgeschlossen ist. Folgern damit die Abschätzung aus Theorem IX.3.