Fachbereich Mathematik
M. Geißert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2010
14.05.2010

4. Übungsblatt zur PDG I

Gruppenübung

Aufgabe G1

Beweisen Sie die Leibniz-Regel für Distributionen (vgl. Bemerkung IV.10).

Aufgabe G2

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie

$$(f * \varphi)(x) = \langle T_f, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Aufgabe G3

Beweisen Sie Theorem V.1 für $n = 1, 2$.

Aufgabe G4

Beweisen Sie Theorem V.2.

Aufgabe G5

Sei $q \in (1, \infty)$, $n \geq 3$ und $\Delta : D(\Delta) := W^{2,q}(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ der Laplace-Operator in $\mathbb{R}^n$.

(a) Stellen Sie Bedingungen an $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, so dass ein $u \in D(\Delta)$ mit $\Delta u = f$ existiert.

(b) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\Delta f = 0$ i. S. v. Distributionen. Zeigen Sie: $f \in C^\infty(\Omega)$.
Hinweis: Wählen Sie einen geeigneten Mollifier ρ_n mit $\rho_n * f$ harmonisch und verwenden Sie Satz III.11.

(c) Zeigen Sie, dass Δ injektiv ist. Folgern Sie, dass Rg Δ dicht in $L^q(\mathbb{R}^n)$ liegt. Untersuchen Sie, ob Δ surjektiv ist.

(d) Geben Sie alle $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\nabla^2 f \in L^q(\mathbb{R}^n)^{n^2}$, welche $\Delta f = 0$ erfüllen.