Fachbereich Mathematik
M. Geißert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2010
07.05.2010

3. Übungsblatt zur PDG I

Gruppenübung

Aufgabe G1

Formulieren und beweisen Sie ein Minimumprinzip für harmonische Funktionen.

Aufgabe G2

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz III.11.

Aufgabe G3

Beweisen Sie Satz IV.3.

Aufgabe G4

Beweisen Sie Satz IV.5.

Aufgabe G5

Diskutieren Sie die Beispiele aus IV.7.

Aufgabe G6

Sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \rho \subset B(0,1)$, $\rho \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$. Dann ist $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, definiert über,

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ein *Mollifier*. Zeigen Sie folgenden Eigenschaften:

(a) $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon * f \subset \operatorname{supp} \rho_\varepsilon + \operatorname{supp} f$ für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann gilt für $f \in C(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\rho_\varepsilon * f - f\|_{L^\infty(K)} = 0.$$

(c) Sei $f \in BUC(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\rho_\varepsilon * f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

(d) Sei, $\varepsilon > 0$, $q \in [1,\infty)$ und $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|\varphi - u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

(e) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^q(\mathbb{R}^n)$ für $q \in [1,\infty)$.

(f) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ für $q \in [1,\infty)$, d.h. für $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ existiert $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ so, dass für alle $\varepsilon > 0$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ein $N_0(\varepsilon, K) > 0$ mit

$$\|f - \varphi_n\|_{L^q(K)} \leq \varepsilon, \quad n \geq N_0(K,\varepsilon).$$

existiert.

(g) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz IV.8.