Partielle Differentialgleichungen I

Matthias Geissert

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Wir betrachten einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung und wollen die Wärmeleitung untersuchen. Dazu treffen wir folgende Annahmen:

- Der Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall $[0,1]$ und $u(x,t)$ ist die Temperatur an der Stelle x zum Zeitpunkt t.
- Konstanten: ρ Dichte, c spezifische Wärme
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Wärmequelle
- Energie in Segment $[x_1, x_2] : E(x_1, x_2, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(x_1, t)$
- Sei $Q(x,t)$ die thermische Energie durch den Punkt x zum Zeitpunkt t und K_0 die thermale Konduktivität. Dann gilt
$$\frac{Q(x,t_2) - Q(x,t_1)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(x, t_1).$$
- Energieerhaltung:
$$c\rho(x_2 - x_1)(u(x_1,t_2) - u(x_1,t_1)) =$$
$$(t_2 - t_1)(x_2 - x_1) f(x_1) - K_0(t_2 - t_1)\left(\frac{\partial}{\partial x}(u(x_1,t_1) - u(x_2,t_1))\right).$$

Daraus folgt

$$\frac{u(x_1,t_2) - u(x_1,t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u(x_1,t_1) - u(x_2,t_1)}{x_1 - x_2}\right)$$

und somit

$$\partial_t u(x_1,t_1) = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_1,t_1), \tag{1}$$ eq:WLG

wobei $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ die Konstante der thermischen Diffusivität ist. Gleichung (1) heißt Wärmeleitungsgleichung. Bei stationärer Temperaturverteilung gilt $0 = \partial_t u(x,t)$ und damit

$$0 = f(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t).$$

Partielle Differentialgleichungen tauchen also in natürlicher Weise in Anwendungen auf. Im Rahmen dieser Vorlesung sind partielle Differentialgleichungen immer ohne Herleitung gegeben.

I. Einführung

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets ein Gebiet.

def:PDE **Definition I.1.**

$$F(D^k u(\mathbf{x}), D^{k-1}u(\mathbf{x}), ..., Du(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{I.1}$$ eq:PDE

heißt partielle Differentialgleichung (PDE) k-ter Ordnung.
Hier ist $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht.

Wir untersuchen folgende Typen von PDE's.

ef:typen **Definition I.2.** PDE (I.1) heißt

(a) *linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u - f(\mathbf{x}),$$

(b) *semi-linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \ldots, \mathbf{x})$$

für $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ und $a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben,

(c) *quasi-linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(D^{k-1}u, \ldots, \mathbf{x}) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \ldots, \mathbf{x})$$

für $a_\alpha, a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben und

(d) *voll nicht-linear*, falls in der Situation von (c) a_α auch von $D^k u$ abhängt.

Später werden wir sehen, dass sich der semi- und der quasi-lineare Fall mit Hilfe eines Fixpunktarguments auf den linearen Fall reduzieren lassen, wobei der quasi-lineare Fall technisch schwieriger ist. Später werden wir auch weitere Typen linearer PDE's diskutieren.

ef:system **Definition I.3.**

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{I.2}$$

heißt System von PDE's k-ter Ordnung. Hier ist $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \cdots \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ gegeben und $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ gesucht.

Beispiel I.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.*

(a) Laplace Gleichung:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

(b) Transportgleichung:

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(c) Wärmeleitungsgleichung:

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(d) Wellengleichung:

$$\partial_t^2 u(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(e) Navier-Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) + (\nabla_{\mathbf{x}} p)(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Hier ist $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *das gesuchte* Geschwindigkeitsfeld *und* $p : \Omega \to \mathbb{R}$ *der gesuchte* (Druck). *Die rechte Seite* $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *ist gegeben.*

Damit die PDE's eindeutig lösbar sind, müssen noch entsprechende Randbedingungen und/oder Anfangsbedingungen gefordert werden.

Typische Fragestellungen, die im Rahmen dieser Vorlesung untersucht werden sind:

(a) Existenz.

(b) Eindeutigkeit.

(c) Regularität.

(d) Abbildungsverhalten der Gleichung [1].

(e) Weitere Eigenschaften der Lösung.

In den folgenden Kapiteln diskutieren wir unterschiedliche Zugänge zur Beantwortung dieser Fragen. Leider lässt sich in nur wenigen Fällen die Lösung einer PDE explizit berechnen. Daher werden im Rahmen dieser Vorlesung sowohl "explizite" als auch abstrakte Methoden (welche zumindest erlauben, einige Aussagen über die Lösung zu treffen) vorgestellt.

[1] Beispielsweise besitzt $u - \Delta u = f$ genau dann eine eindeutige Lösung $u \in X$, wenn $f \in Y$, d.h. $(1 - \Delta) : X \to Y$ ist ein Isomorphismus.

II. Die Methode der Charakteristiken

II.1. Motivation anhand der Transportgleichung

ransport

Für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$\partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \tag{II.1}$$

eq:tgl

$$u = g, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \tag{II.2}$$

eq:tglaw

Idee: Finde Weg $\mathbf{X}_{\mathbf{x_0}} : I \to \mathbb{R}^{n+1}_+$ entlang dem sich u durch Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE) berechnen lässt. Um die Notation zu erleichten setze im Folgenden $\mathbf{X}_{\mathbf{x_0}}(s) = \mathbf{X}(s)$ und $\partial_{n+1} = \partial_t$. Weiter sei

$$z(s) = u(\mathbf{X}(s)), \quad \mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{X}(s)), \quad z(0) = g(\mathbf{x_0}).$$

Dann folgt mit der Kettenregel

$$\dot{z}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} (\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{p}(s) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s). \tag{II.3}$$

eq:dz

Die Ableitung von $\mathbf{p}(s)$ ergibt komponentenweise erneut mit der Kettenregel

$$(\dot{\mathbf{p}}^i)(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u \\ \partial_t \partial_i u \end{pmatrix} (\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Aus (II.1) folgt $\partial_i \partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u = 0$ oder als Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} \partial_t \partial_i u \\ \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0.$$

Setze $\dot{\mathbf{X}}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h.

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{x_0} + s\mathbf{b} \\ s \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $\dot{\mathbf{p}}^i(s) = 0$. Mit

$$\mathbf{p}(0) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_i u \end{pmatrix} (\mathbf{x_0}, 0)$$

folgt $\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_i u \end{pmatrix} (\mathbf{x_0}, 0)$. Gleichung (II.3) impliziert nun

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} u)(\mathbf{x_0}, 0) + (\partial_t u)(\mathbf{x_0}, 0) \overset{\text{(II.1)}}{=} 0 \\ z(0) &= g(\mathbf{x_0}) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$u(\mathbf{x_0}, 0) \overset{\text{(II.2)}}{=} g(\mathbf{x_0}) = z(s) = u(\mathbf{X}(s)) = u(\mathbf{x_0} + \mathbf{b}s, s).$$

Mit $\mathbf{x} := \mathbf{x_0} + \mathbf{b}s$ folgt also $u(\mathbf{x}, s) = u(\mathbf{x} - \mathbf{b}s, 0) = g(\mathbf{x} - \mathbf{b}s)$. Insgesamt erhalten wir

thm:sol-tgl **Theorem II.1.** *Sei $k \in \mathbb{N}$, $g \in C^k(R^n)$. Dann löst*

$$u(\mathbf{x}, s) = g(\mathbf{x} - \mathbf{b}s) \in C^k(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$$

die Transportgleichung (II.1).

Bemerkung II.2. *u ist nicht glatter als g.*

II.2. Allgemeiner Fall

Betrachte nun beliebige PDE 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} F(Du(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \Gamma \end{aligned} \tag{II.4}$$ eq:2

Hierbei ist $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben und glatt.

II.2.1. Herleitung einer ODE für z(s), p(s), X(s)

Wir definieren:

$$\begin{aligned} z(s) &= u(\mathbf{X}(s)) \\ \mathbf{p}(s) &= (\nabla u)(\mathbf{X}(s)) \end{aligned}$$

und berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= (\nabla u)(\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{p}(s) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) \\ \dot{\mathbf{p}}^i(s) &= (\nabla \partial_i u)(\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s), \quad i = 1, .., n \end{aligned}$$

Ziel: Elimiere Ableitungen 2. Ordnung. Aus (II.4) folgt

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_{\mathbf{p}_j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \partial_i \partial_j u + \partial_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \partial_i u \\ + \partial_i F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Also setze

$$\dot{\mathbf{X}}^j(s) = \partial_{\mathbf{p}_j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)), \quad j = 1, .., n$$

Dann gilt

$$\dot{\mathbf{p}}^i(s) = -\partial_{\mathbf{p}_i} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s))\mathbf{p}^i(s) - \partial_i F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)), \quad i = 1, .., n$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(s) &= -\partial_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s))\mathbf{p}(s) - D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \cdot (\nabla_{\mathbf{p}} F)(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \\ \dot{\mathbf{X}}(s) &= (\nabla_{\mathbf{p}} F)(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \end{aligned} \tag{II.5}$$

eq:3

Insbesondere erfüllt jede Lösung $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$ von (II.4) das System (II.5) solange $x(s) \in \Omega$.

II.2.2. OBdA Rand von Ω 'lokal flach'

Rand von Ω flach bedeutet $\Gamma \cong \mathbb{R}^n_+$. In einer Umgebung $U \subset \Gamma$ von $x_0 \in \Gamma$ lässt sich Γ durch Schieben und Drehen in den Graph einer glatten 'kleinen' Funktion $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ überführt. Setze nun

$$\begin{aligned} v(y) &= u(y_1, .., y_{n-1}, y_n + \phi(y_1, ..., y_{n-1})), \\ u(x) &= v(x_1, .., x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, ..., x_{n-1})), \\ \mathbf{\Phi}(x) &= (x_1, .., x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, ..., x_{n-1})), \\ \mathbf{\Psi}(x) &= (x_1, .., x_{n-1}, x_n + \phi(x_1, ..., x_{n-1})). \end{aligned}$$

Dann gilt wegen $(\nabla u)(\mathbf{x}) = (\nabla v)(\mathbf{y})(\nabla \mathbf{\Phi})(\mathbf{x})$ die Gleichung

$$0 = F((\nabla u)(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = F((\nabla v)(\mathbf{y})(\nabla \mathbf{\Phi})(\mathbf{x}), v(\mathbf{y}), \Psi(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}),$$

d.h. für ein geeignetes G und $\Omega_* \subset \mathbf{\Phi}(\Omega)$:

$$G(\nabla v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \Omega_*.$$

Außerdem $v = h$ auf $\Gamma_* \subset \Phi(\Gamma)$ mit $h(\mathbf{y}) = g(\Psi(\mathbf{y}))$, d.h. (II.4) ist lokal äquivalent zu

$$\begin{aligned} G(\nabla v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y}), \mathbf{y}) &= 0 \text{ in } \Omega_* \\ v &= h \text{ auf } \Gamma_* \end{aligned}$$

II.2.3. Bestimmung der Anfangsdaten für Ω mit glatten Rand

Definiere $\mathbf{x_0} = \mathbf{X}(0)$, $z_0 = z(0) = g(\mathbf{x_0})$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$. Wie in Section II.1 gilt dann

$$\begin{aligned} \partial_j u(\mathbf{x_0}) &= \mathbf{p}_{0,j} = (\partial_j g)(\mathbf{x_0}), \quad j = 1, .., n-1, \\ F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) &= 0. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit die Kompatibilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(0) &= \mathbf{x_0}, \\ z(0) &= z_0, \\ \mathbf{p}_j(0) &= (\partial_j g)(\mathbf{x_0}), \quad j = 1,..,n-1 \\ F(\mathbf{p}(0), z(0), \mathbf{X}(0)) &= 0. \end{aligned} \tag{II.6}$$ eq:4

Der Punkt $(\mathbf{x_0}, z_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ heißt *zulässig*, falls (II.6) erfüllt ist. Beachte, dass z_0 durch die Wahl von $\mathbf{x_0}$ festgelegt ist. Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbf{p}_0$ ist nicht klar.

II.2.4. Nicht charakteristische Randdaten

In diesem Abschnitt wollen wir stets annehmen, dass $(\mathbf{x_0}, z_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ zulässig ist. Wir wollen (II.6) jedoch nicht nur in $\mathbf{x_0} \in \Gamma$, sondern in einer Umgebung von $\mathbf{x_0}$ betrachten. Dies führt auf folgende Erweiterung von (II.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(0) &= \mathbf{y}, \\ \mathbf{p}(0) &= \mathbf{q}(\mathbf{y}), \\ z(0) &= g(\mathbf{y}), \\ \mathbf{q}_j(\mathbf{y}) &= (\partial_j g)(\mathbf{y}), \quad j = 1,..,n-1, \\ F(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y}) &= 0, \quad \mathbf{y} \in U_{\mathbf{x_0}}, \end{aligned} \tag{II.7}$$ eq:4'

wobei $U_{\mathbf{x_0}}$ eine Umgebung von $\mathbf{x_0}$ in Γ ist.

lma:2.2 **Lemma II.3.** *Sei* $F_{\mathbf{p}_n}(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \neq 0$. *Dann existiert eine eindeutige Lösung* q *von* (II.7) *für* $\mathbf{y} \in \Gamma$ *nahe bei* x_0. *In diesem Fall heißt* $(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0})$ nicht charakteristisch.

Beweis:. *Definiere* $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \times U_{\mathbf{x_0}} \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) &= \mathbf{p}_i - \partial_i g(y), \quad i = 1,..,n-1 \\ \mathbf{G}_n(\mathbf{p}, \mathbf{y}) &= F(\mathbf{p}, g(\mathbf{y}), \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Dann folgt $\mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x_0}) = 0$ *und*

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x_0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \partial_{\mathbf{p}_1} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) & \partial_{\mathbf{p}_2} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) & \cdots & \partial_{n-1} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) & \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \end{bmatrix}$$

Insbesondere gilt also $\det \mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x_0}) = \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \neq 0$. *Die Existenz von* $\mathbf{q}$ *in einer Umgebung von* $\mathbf{x_0}$ *in* Γ *folgt aus dem Satz über implizite Funktionen mit* $\mathbf{G}(\mathbf{q}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$ *und* $\mathbf{q}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{p}_0$.

rem:2.3 **Bemerkung II.4.** *Falls* Γ *nicht flach* $\mathbf{x_0} \in \Gamma$ *ist, so ist* $\mathbf{x_0} \in \Gamma$ *nicht charakteristisch falls* $D_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \nu(\mathbf{x_0}) \neq 0$, *wobei* ν *die äußere Normale bezeichnet.*

II.2.5. Lokale Lösungen

OBdA sei Γ in diesem Abschnitt flach. Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(s) &= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(y_1, .., y_{n-1}, s),\\ z(s) &= z(\mathbf{y}, s) = z(y_1, .., y_{n-1}, s),\\ \mathbf{X}(s) &= \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{X}(y_1, .., y_{n-1}, s).\end{aligned}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung von (II.5) mit Anfangsdaten (II.7) (Übungsaufgabe). Wie im Anschnitt II.1 müssen wir X invertieren.

lma:2.4 **Lemma II.5.** *Sei $(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0})$ nicht charakteristisch. Dann existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ um 0 und Umgebungen $W \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von $\mathbf{x_0}$ sowie $V \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{x_0}$, sodass für alle $\mathbf{x} \in V$ eindeutige $s = S(\mathbf{x}) \in I$ und $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x) \in W$ existieren mit $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x}))$. Die Abbildungen S und $\mathbf{Y}$ sind C^2.*

Beweis:. *Es gilt $\mathbf{X}(\mathbf{x_0}, 0) = \mathbf{x_0}$, $\mathbf{X}(\mathbf{y}, 0) = (\mathbf{y}, 0)$. Weiter*

$$(\nabla\mathbf{X})(\mathbf{x_0}, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{\mathbf{p}_1} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \partial_{\mathbf{p}_{n-1}} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}), \end{bmatrix}$$

d.h. $\det(\nabla\mathbf{X})(\mathbf{x_0}, 0) \neq 0$ nach Voraussetzung. Die Behauptung folgt nach dem Satz über die Umkehrabbildung.

thm:2.5 **Theorem II.6.** *Unter den Voraussetzungen von Lemma (II.5) setze $u(\mathbf{x}) = z(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$, wobei $\mathbf{y}$, s, $\mathbf{p}$ und z wie oben definiert sind. Dann gilt*

$$\begin{aligned}F(\nabla u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, &\quad \mathbf{x} \in V,\\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), &\quad \mathbf{x} \in V \cap \Gamma.\end{aligned}$$

Beweis:. *<u>Schritt 1:</u> Löse* (II.5), (II.6).
Die Existenz einer Lösung $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)$, $z(s) = z(\mathbf{y}, s)$, $\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)$ von (II.5) *und* (II.6) *folgt unmittelbar aus der Theorie für gewöhnliche DGL.*

<u>Schritt 2:</u> Es gilt $f(\mathbf{y}, s) = F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) = 0$ für $\mathbf{y} \in W$ und $s \in I$.
Wegen $\mathbf{p}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{q}(\mathbf{y})$, $z(\mathbf{y}, 0) = g(\mathbf{y})$ folgt $f(\mathbf{y}, 0) = 0$ für $\mathbf{y} \in W$. Weiter folgt mit (II.5) *dann (Übungsaufgabe)*

$$\begin{aligned}\partial_s f(\mathbf{y}, s) =& D_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \partial_s \mathbf{p} + \nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \partial_s z + \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \partial_s \mathbf{X}\\ =& D_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, z, \mathbf{X})[-\nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{p} - \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X})] + D_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X})\\ &+ \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) = 0, \quad s \in I.\end{aligned}$$

<u>*Schritt 3:*</u> *Wir zeigen* $F(\mathbf{p}(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in V$. *Mit Schritt 2 folgt direkt:*

$$F(\mathbf{p}(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = F(\mathbf{p}(\mathbf{Y}(\mathbf{x})), S(\mathbf{x})), z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})), \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) = 0.$$

<u>*Schritt 4:*</u> *Wir zeigen* $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V$. *Zunächst zeige*

$$\partial_s z(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s) \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial s}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_s \mathbf{X}(y, s) \tag{II.8}$$

eq:thm:2

$$\partial_{\mathbf{y}_j}(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s) \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial \mathbf{y}_j}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_j} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \tag{II.9}$$

eq:thm:2

Gleichung (II.8) *folgt direkt aus* (II.5).
Für (II.9) *sei* $\mathbf{y} \in \Gamma$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$ *und setze*

$$r_i(s) = \partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s).$$

Dann gilt

eq:thm:2.5-ode

$$\begin{aligned} r_i(0) &= \partial_i g - \mathbf{q}_i(\mathbf{y}) \overset{(II.7)}{=} 0 \\ \dot{r}_i(s) &= \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s z(\mathbf{y}, s) - \partial_s \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \end{aligned} \tag{II.10}$$

eq:thm:2

Aus (II.8) *folgt*

$$\partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s z(\mathbf{y}, s) = (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_s \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s).$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot{r}_i(s) &= (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \partial_s \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \\ &\quad - \partial_s \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \\ &\overset{(II.5)}{=} (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) - [-\nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \\ &\quad - \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)] \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \end{aligned}$$

Mit Schritt 2 folgt

$$\begin{aligned} 0 = \partial_{\mathbf{y}_i} f(\mathbf{y}, s) &= \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \\ &\quad + \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s) \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s), \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{r}_i(s) &= \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot [-\partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s)) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)] \\ &= -\nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot r_i(s). \end{aligned}$$

Aus der Theorie von ODE folgt, dass $r_i \equiv 0$, $s \in I$, $i = 1, \ldots, n-1$ eine Lösung von (II.10) *ist, d.h.* (II.9) *gilt. Wir berechnen mit Hilfe von* (II.8) *und* (II.9)*:*

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{x}_j} u(\mathbf{x}) &\overset{Def.}{=} \partial_s z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \left[\nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_y \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x})\right].\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen:

$$\partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} \quad \textit{(Kronecker-Delta)}$$

Es gilt wegen $\mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}\delta_{ik} &= \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{X}_k \\ &= \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) + \nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\partial_{\mathbf{x}_j} u(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s)$ und somit $\nabla_{\mathbf{x}} u = \mathbf{p}$.

ex:2.6 **Beispiel II.7.** *Wir betrachten eine lineare, homogene PDE, d.h.*

$$F(\nabla u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla(u)(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}) \cdot u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{II.11}$$ eq:ex:2.6

Dann folgt mit

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= b(\mathbf{x}) \\ \nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= c(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= 0.\end{aligned}$$

und (II.5) *(vgl. Übungen)*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}(s) &= -c(\mathbf{X}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \cdot b(\mathbf{X}(s)) = -c(\mathbf{X}(s)) \cdot z(s) \\ \dot{\mathbf{X}}(s) &= b(\mathbf{X}(s)).\end{aligned}$$

Annahme: *Sei $c \equiv 0$ und $\dot{\mathbf{X}}(s) = b(\mathbf{X}(s))$ besitzt folgende Trajektorien:*

INSERT PICTURE

Somit ist $z \equiv const$ entlang jeder Trajektorie; aber beachte Kompatibilitätsbedingung an g, da die Funktionswerte am Rand vorgeschrieben sind.

Annahme: *Sei $c \equiv 0$ und $\dot{\mathbf{X}}(s) = b(\mathbf{X}(s))$ besitzt folgende Trajektorien:*

INSERT PICTURE

Lösung ist nur glatt, falls g konstant ist.

rem:2.7 **Bemerkung II.8.** *Insbesondere folgt aus obigem Beispiel, dass i.A. keine glatte Lösung existiert.*

II.2.6. Schwache Formulierung

Wir betrachten die PDE

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) &= g \quad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned} \tag{II.12}$$

eq:schwFo

Multiplikation mit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}_+})$ liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x F(u)) \cdot \varphi \\ &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi + \int_{\mathbb{R}} g \cdot \varphi(\cdot, 0) \end{aligned} \tag{II.13}$$

eq:schwFo

φ heißt *Testfunktion*.

dfn:IntLsg **Definition II.9.** Wir sagen, dass $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ eine *Integrallösung* von (II.12) ist, falls (II.13) für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}_+)$ gilt.

Wir betrachten folgende Situation:

INSERT PICTURE

Hierbei bezeichnet ν die äußere Normale, u sei glatt in V_l und V_r. C heißt *Unstetigkeitskurve*, falls u in C nicht stetig ist (wovon wir im Folgenden ausgehen). Somit ergibt sich

$$0 = \int_{V_l} u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi = -\int_{V_l} (\partial_t u + \partial_x F(u))\, \varphi, \qquad \varphi \in C_c^\infty(V_l).$$

Es folgt (für V_r analog):

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 \quad \text{in } V_l \\ \partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 \quad \text{in } V_r. \end{aligned} \tag{II.14}$$

eq:unste

Weiter gilt für $\varphi \in C_c^\infty(V)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_V u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi \\ &= -\int\limits_{V_l \cup V_r} (\partial_t u + \partial_x F(u))\, \varphi + \int\limits_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_l \\ F(u_l) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi - \int\limits_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_r \\ F(u_r) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi \\ &\overset{\text{(II.14)}}{=} \int\limits_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_l - u_r \\ F(u_l) - F(u_r) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi, \end{aligned}$$

wobei u_l der Grenzwert von links in $C \cap V$ und u_r der Grenzwert von rechts ist.

Sei nun C gegeben durch $\{(x,t) : x = S(t)\}$ für $S : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ glatt. Dann gilt

$$F(u_l) - F(u_r) = \dot{S} \cdot (u_l - u_r),$$

wobei

$$\nu \overset{(\text{ÜA})}{=} \frac{1}{1+(\dot{S})^2}\begin{pmatrix}-\dot{S}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Mit der Notation

$$\begin{aligned}
[[u]] &= u_l - u_r && \text{(Sprung in } u \text{ entlang } C)\\
[[F(u)]] &= F(u_l) - F(u_r) && \text{(Sprung in } F(u) \text{ entlang } C)\\
\sigma &= \dot{S} && \text{(„Geschwindigkeit“ von } C)
\end{aligned}$$

lässt sich dies über

$$[[F(u)]] = \sigma \cdot [[u]] \tag{II.15}$$

eq:R-H-Bed

entlang der Unstetigkeitskurve C ausdrücken. Gleichung (II.15) heißt *Rankine-Hugoniot-Bedingung*.

Beispiel II.10 (*Burgersgleichung*)**.** *Setze*

$$F(u) := \frac{u^2}{2}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0,\\ 1-x & 0 < x \le 1,\\ 0 & x > 1.\end{cases}$$

und betrachte

$$\begin{aligned}
\partial_t u + \partial_x\left(\tfrac{u^2}{2}\right) &= 0 \text{ in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\\
u &= g \text{ auf } \mathbb{R}\times\{t=0\}
\end{aligned} \tag{II.16}$$

:burgers

Die (projizierten) Charakteristiken haben die Form [ÜA] $Y(s) = (g(x_0)s + x_0, s)$, also ist die Lösung über

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \le t, 0 \le t < 1,\\ \frac{1-x}{1-t} & t \le x \le 1, 0 \le t < 1,\\ 0 & x \ge 1, 0 \le t < 1.\end{cases}$$

gegeben.

Für $t > 1$ kreuzen sich die Charakteristiken. Setzte $s(t) = \frac{1+t}{2}$ und

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x < s(t), t \geq 1, \\ 0 & x > s(t), t \geq 1. \end{cases}$$

Dann gilt entlang s:

$$F(u_l) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2},\ F(u_r) = \frac{0^2}{2} = 0,\ u_l = 1,\ u_r = 0,$$

d.h. $[[u]] = 1$, $[[F(u)]] = \frac{1}{2}$. Die Rankine-Hugonoit-Bedingung liefert also $\sigma = \frac{1}{2} = \dot{s}$.

Wir betrachten nun II.10 mit $g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$

Dann ist sowohl

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & x < t/2, \\ 1 & x > t/2 \end{cases} \text{ als auch } u_2(x,t) = \begin{cases} 1 & x > t, \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

eine Integrallösung von II.10 ([ÜA] Überprüfe Rankine-Hugoniot-Bedingung).

Problem: Eindeutigkeit.

Im Folgenden nehmen wir an, dass wir von einem Punkt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ausgehend entlang einer (projizierten) Charakteristik **rückwärts** keine andere Charakteristik treffen.

Sei nun C wieder eine Unstetigkeitskurve und $P \in C$, so dass P von den Charakteristiken Y_1 und Y_2 getroffen wird.

Dann gilt wegen $Y_i(s) = (F'(g(x_i))s + x_i, s)$, $i = 1, 2$, $x_1 < x_2$ für die Charakteristiken, dass

$$\begin{aligned} &F'(u_l)s + x_1 = F'(u_r)s + x_2 \Rightarrow (F'(u_l) - F'(u_r))s = x_2 - x_1 > 0 \\ &\overset{[\ddot{U}A]}{\Rightarrow} F'(u_l) > \sigma > F'(u_r). \end{aligned} \tag{II.17}$$

eq:entroBed

Diese Ungleichung nennt man auch *Entropie-Bedingung*. Eine Unstetigkeitskurve nennt man *Schock* falls (II.17) und die Rankine-Hugonoit-Bedingung erfüllt sind.

Sei nun F gleichmäßig konvex, d.h. $F'' \geq \Theta > 0$ für ein $\Theta > 0$. Dann folgt wegen F' streng monoton wachsend, dass (II.17) zu $u_l > u_r$ äquivalent ist. Insbesondere ist F' injektiv und surjektiv. Wir definieren

$$G := (F')^{-1}.$$

Dann ist eine Integrallösung von II.10 für $g(x) = \begin{cases} u_l & x < 0, \\ u_r & x > 0 \end{cases}$ und $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \begin{cases} u_l & \frac{x}{t} < \sigma \\ u_r & \frac{x}{t} > \sigma \end{cases} \quad \text{mit } \sigma = \tfrac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r} \qquad \text{falls } u_l > u_r \\ \text{bzw. } u(x,t) &= \begin{cases} u_l & \frac{x}{t} < F'(u_l) \\ G(\frac{x}{t}) & F'(u_l) < \frac{x}{t} < F'(u_r) \\ u_r & \frac{x}{t} > F'(u_r) \end{cases} \qquad \text{falls } u_l < u_r \end{aligned}$$

(ohne Beweis).

Bemerkung II.11.

(a) Im ersten Fall sind u_l und u_r durch einen Schock getrennt, im zweiten Fall durch eine Rarefaction Wave.

(b) *Man kann zeigen, dass für F konvex und glatt höchstens eine Integrallösung existiert, welche zusätzlich*

$$u(x+z,t) - u(x,t) \leq c(1+\frac{1}{t})z,\ x \in \mathbb{R},\ z,t > 0$$

für ein $c > 0$ genügt. Insbesondere sind diese Lösungen eindeutig.

(c) *Die Existenz einer Integrallösung lässt sich mit Variationsrechnung zeigen, vgl. Lax-Oleinik-Formel ([Eva10, Abschnitt 3.4.2]).*

II.2.7. Inhomogenes Problem

sec:charInhom

Wir betrachten in diesem Abschnitt:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{aligned} \tag{II.18}$$

eq:in_hor

Wie in Abschnitt 1 setzen wir

$$z(s) = u(\mathbf{X}(s)),\ \mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} (\mathbf{X}(s)),\ \dot{\mathbf{X}}(s) = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt mit $\partial_{n+1} = \partial_t$, dass

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s)\dot{\mathbf{X}}(s), \\ (\dot{\mathbf{p}}^i)(s) &= \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u \\ \partial_t \partial_i u \end{pmatrix} (\mathbf{X}(s)) \cdot \mathbf{X}(s),\ i = 1,\ldots,n+1 \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix} = f(\mathbf{X}(s)). \end{aligned}$$

Integration der letzten Gleichung ergibt

$$z(t) - z(0) = \int\limits_0^t f(\mathbf{X}(s))ds = \int_0^t f(\mathbf{x_0} + \mathbf{b}s, s)ds,$$

d.h $u(\mathbf{x_0} + \mathbf{b}t, t) = \int_0^t f(\mathbf{x_0} + \mathbf{b}s, s)ds$. Mit $\mathbf{x} := \mathbf{x_0} + \mathbf{b}t$ folgt dann

$$u(\mathbf{x},t) = \int_0^t f(\mathbf{x} + \mathbf{b}(s-t), s)ds. \tag{II.19}$$

eq:transp

II.3. Die Wellengleichung

II.3.1. Der Fall $n = 1$

sec:welle1d

Wir betrachten zunächst

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \\ \partial_t u &= h \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{aligned} \tag{II.20}$$

eq:welle

Wegen $(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = \partial_t^2 u - \partial_x^2 u$ lässt sich II.20 in

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x u &= v && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_t v + \partial_x v &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ v &= h - \partial_x g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

umschreiben. Mit Abschnitt 1 folgt nun ($b = 1$)

$$v(x, s) = h(x - s) - (\partial_x g)(x - s) =: a(x - s).$$

Mit Abschnitt 2.7 folgt analog ($b = -1$, $f(x, s) = v(x, s)$)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t v(x - (s - t), s)ds + g(x + t) \\ &= \int_0^t a(x + t - 2s)ds + g(x + t) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + g(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (\partial_x g)(y)dy + g(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy + \frac{1}{2} g(x + t) + \frac{1}{2} g(x - t) \end{aligned} \tag{II.21}$$

eq:Alembert

Dies ist *d'Alemberts Formel*. In $(*)$ wurde die Substitution $y = x + t - 2s$, $dy = -2ds$ verwendet.

hm:welle

Theorem II.12. *Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ dann ist $u \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ definiert durch II.21 eine Lösung von II.20.*

Beweis:. *Nachrechnen.*

Im nächsten Schritt betrachten wir

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u &= 0 && \text{auf } \{x = 0\} \times \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{II.22}$$

eq:welle2

mit $g(0) = h(0) = 0$.
<u>Idee:</u> Erweitere u, g, h auf $\mathbb{R}$, d.h.

$$\tilde{g} = \begin{cases} g(x) & , x \geq 0 \\ -g(-x) & , x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{h} = \begin{cases} h(x) & , x \geq 0 \\ -h(-x) & , x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{u} = \begin{cases} u(x) & , x \geq 0 \\ -u(-x) & , x < 0 \end{cases}.$$

Falls u Gleichung (II.22) löst, so löst $\tilde{u}$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tilde{u} - \partial_x \tilde{u} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \tilde{u} &= \tilde{g} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ \partial_t \tilde{u} &= \tilde{h} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Nach (II.19) ist $\tilde{u}$ über

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy$$

gegeben. Insbesondere folgt $\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(t) + \tilde{g}(-t)) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \tilde{h}(y)dy = 0$ für $t \geq 0$ und

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy & , x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t} h(y)dy & , 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

<u>Beachte:</u> $u \notin \mathcal{C}^2$ falls $g''(0) \neq 0$

II.3.2. Der Fall $n = 3$

Wir setzen

$$U(\mathbf{x}, r, t) := \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{\partial B(\mathbf{x}, r)} \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y}, t) \quad \text{(Mittelwert über } \partial B(\mathbf{x}, r)),$$

$$G(\mathbf{x}, r, t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} g(\mathbf{y}, t), \quad H(\mathbf{x}, r, t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} h(\mathbf{y}, t).$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta_{\mathbf{x}} u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.23}$$

eq:welle

für $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n), h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

lma:II.12

Lemma II.13. *(*(Euler-Poisson-Darboux-Gleichung)
Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *und* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ *eine Lösung von* (II.23)*. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U - \partial_r^2 U - \frac{n-1}{r}\partial_r U &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ U &= G && \textit{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \partial_t U &= H && \textit{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.24}$$

eq:EPDGl

Beweis:. *Mit*

$$U(\mathbf{x},r,t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y},t)dS(y) \overset{\ddot{U}A}{=} \fint_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x}+r\mathbf{z},t)dS(\mathbf{z})$$

folgt

$$\begin{aligned}\partial_r U(\mathbf{x},r,t) &= \fint_{\partial B(0,1)} \mathbf{z}(\nabla u)(\mathbf{x}+r\mathbf{z},t)dS(\mathbf{z}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \frac{y-x}{r}(\nabla u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) \\ &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \nu(\triangledown u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) \overset{Gau\ss}{=} \frac{1}{|\partial B(\mathbf{x},r)|}\int_{B(\mathbf{x},r)} div(\nabla u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{|B(\mathbf{x},r)|}{|\partial B(\mathbf{x},r)|}\fint_{B(\mathbf{x},r)} (\Delta u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) \overset{\ddot{U}A}{=} \frac{r}{n}\fint_{B(\mathbf{x},r)} (\Delta u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\partial_r^2 U(\mathbf{x},r,t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) + (\frac{1}{n}-1)\fint_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}). \qquad \text{(II.25)} \quad \boxed{\texttt{eq:sndDU}}$$

Damit folgt $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ *und*

$$\begin{aligned} &\lim_{r\searrow 0} \partial_r U(\mathbf{x},r,t) = 0, \\ &\lim_{r\searrow 0} \partial_r^2 U(\mathbf{x},r,t) = \frac{1}{n}\Delta u(\mathbf{x},t).\end{aligned} \qquad \text{(II.26)} \quad \boxed{\texttt{eq:limU}}$$

Aus (II.23) *ergibt sich dann*

$$\partial_r U(\mathbf{x},r,t) = \frac{r}{n}\fint_{B(\mathbf{x},r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y},t)dy = \frac{1}{n\alpha(n)}\frac{1}{r^{n-1}}\int_{B(\mathbf{x},r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y},t)dy,$$

wobei $\alpha(n)$ *das Maß der Einheitskugel bezeichnet. Insbesondere erhalten wir*

$$r^{n-1}\partial_r U(\mathbf{x},r,t) = \frac{1}{n\alpha(n)}\int_{B(\mathbf{x},r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y},t)dy. \qquad \text{(II.27)} \quad \boxed{\texttt{eq:GlU}}$$

Mit den Gleichungen (II.27) *und* (II.25) *folgt dann*

$$\begin{aligned}
\partial_r(r^{n-1}\partial_r U(\mathbf{x},r,t)) =&(n-1)r^{n-2}\partial_r U(\mathbf{x},r,t) + r^{n-1}\partial_r^2 U(\mathbf{x},r,t) \\
=&\frac{n-1}{n\alpha(n)}\frac{1}{r}\int\limits_{B(\mathbf{x},r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) + r^{n-1}\fint\limits_{\partial B(\mathbf{x},r)} (\Delta u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) \\
&+ r^{n-1}\frac{1-n}{n}\fint\limits_{B(\mathbf{x},r)} (\Delta u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) \\
=&r^{n-1}\fint\limits_{\partial B(\mathbf{x},r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) = r^{n-1}\partial_t^2 U,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt $|B(\mathbf{x},r)| = r^n\alpha(n)$ *verwendet haben. Insgesamt folgt*

$$(n-1)r^{n-2}\partial_r U(\mathbf{x},r,t) + r^{n-1}\partial_r^2 U(\mathbf{x},r,t) = r^{n-1}\partial_t^2 U$$

Teilt man beide Seiten der Gleichung durch r^{n-1}*, so folgt die Behauptung.*

Sei nun $n=3$. Wir setzen $\tilde{U} = rU$, $\tilde{G} = rG$ und $\tilde{H} = rH$. Dann folgt mit (II.24)

$$\begin{aligned}
\partial_t^2\tilde{U} = r\partial_t^2 U = r(\partial_r^2 U + \frac{2}{r}\partial_r U) = r\partial_r^2 U + 2\partial_r U) = \partial_r(U + r\partial_r U) \\
= \partial_r\partial_r\tilde{U} = \partial_r^2\tilde{U}
\end{aligned}$$

und mit (II.26)

$$\partial_r^2\tilde{G}(0) = 0\cdot\partial_r^2 G(0) + 2\partial_r G(0) = 0,$$

d.h. $\tilde{U}$ löst

$$\begin{aligned}
\partial_t^2\tilde{U} - \partial_r\tilde{U} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ \\
\tilde{U} &= \tilde{G} && \text{auf } \mathbb{R}_+\times\{t=0\} \\
\partial_t\tilde{U} &= \tilde{H} && \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \\
\tilde{U} &= 0 && \text{auf } \{r=0\}\times\mathbb{R}_+
\end{aligned} \tag{II.28}$$

eq:16

Mit Abschnitt II.3.1 folgt

$$\tilde{U}(\mathbf{x},r,t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t}\tilde{H}(y)dy$$

und

$$u(\mathbf{x},t) = \underset{r\searrow 0}{lim}\, U(\mathbf{x},r,t) = \lim r \searrow 0 \frac{\tilde{U}(\mathbf{x},r,t)}{r} = \lim r \searrow 0 (\frac{1}{2r}(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2r}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy$$
$$= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\,(tG(t)) + tH(t) = \frac{\partial}{\partial t}\,(t \fint_{\partial B(x,t)} g\ ds) + t \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} h\ ds. \tag{II.29}$$

eq:17

Wie oben folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} g(\mathbf{y})\ dS(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial t} \fint_{\partial B(0,1)} g(\mathbf{x}+t\mathbf{z})\ dS(\mathbf{z}) = \int_{\partial B(0,1)} z(\nabla g)(\mathbf{x}+t\mathbf{z})\ dS(\mathbf{z})$$
$$= \int_{\partial B(\mathbf{x},t)} \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t}(\nabla g)(\mathbf{y})\ dS(\mathbf{z})$$

Mit (II.29) löst u, definiert über

$$u(\mathbf{x},t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} th(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})\ dS(\mathbf{y})$$

löst (II.23) Diese Formel heisst *Kirchhoff's Formel*

thm:II.13 **Theorem II.14.** *Sei $n = 3$, $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3), h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist die Lösung von* (II.23) *über*

$$u(\mathbf{x},t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} th(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})\ dS(\mathbf{y}) \tag{II.30}$$

eq:welleF3

gegeben.

rem:II.14 **Bemerkung II.15.** *Obiger Ansatz kann auf beliebige,* ungerade Dimension übertragen werden.

II.3.3. Der Fall $n = 2$

Leider ist keine Transformaion bekannt, welche die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung in eine eindimensionale Wellengleichung überführt. Wir setzen $\bar{u}(x_1,x_2,x_3,t) := u(x_1,x_2,t)$. Dann folgt nach Definition, dass $\overline{u}$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \bar{u} - \partial_x \bar{u} &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ \bar{u} &= \bar{g} \qquad \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\} \\ \partial_t \bar{u} &= \bar{h} \qquad \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\} \end{aligned}$$

mit $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$ und $\bar{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)$ löst. Setzen wir $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, 0)$, so ist $\overline{u}$ nach Formel II.29 über

$$\bar{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\,(t \fint_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}},t)} \bar{g}\; d\bar{S}) + t \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}},t)} \bar{h}\; d\bar{S}$$

gegeben.

$$u(\mathbf{x}, t) = \overline{u}(\overline{\mathbf{x}}t) = \frac{\partial}{\partial t}(t \fint_{\partial \overline{B}(\overline{\mathbf{x}},t)} \overline{g}\; d\overline{S}) + t \fint_{\partial \overline{B}(\overline{\mathbf{x}},t)} \overline{h}\; d\overline{S}, \quad \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, 0)$$

Wegen

$$\fint_{\partial \overline{B}(\overline{\mathbf{x}},t)} \overline{g} d\overline{S} = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial \overline{B}(\overline{\mathbf{x}},t)} \overline{g} d\overline{S} \overset{(\text{ÜA})}{=} \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(\mathbf{x},t)} g(\mathbf{y})(1 + |D\gamma|^2)^{\frac{1}{2}}\; d\mathbf{y}$$

wobei $\gamma(t) = (t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}$.
Mit $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, t)$ folgt $(\nabla\gamma)(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{-\frac{1}{2}} 2(\mathbf{y} - \mathbf{x})$
$1 + |D\gamma|^2 = 1 + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}^2} = \frac{t}{t^2 - |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}$

$$\Rightarrow \fint_{\partial \overline{B}(\overline{\mathbf{x}},t)} \overline{g} d\overline{S} = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}}\; \mathrm{d}\mathbf{y} = \frac{t}{2} \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}}\; \mathrm{d}\mathbf{y}$$

Analog natürlich auch fr̈ h, sodass folgt:

$$\Rightarrow u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\partial_t(t^2 \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}}\; \mathrm{d}\mathbf{y}) + \frac{t^2}{2} \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{h(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}}\; \mathrm{d}\mathbf{y}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
&\partial_t(t^2 \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}}\; \mathrm{d}\mathbf{y}) \\
&= \partial_t(t^2 \fint_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(t^2 - t^2\mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}}\; \mathrm{d}\mathbf{z}) \\
&= \partial_t(t \fint_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(1 - \mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}}\; \mathrm{d}\mathbf{z}) \\
&= \fint_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(1 - \mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}}\; \mathrm{d}\mathbf{z} + t \fint_{B(0,1)} \frac{\mathbf{z}(\nabla g)(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(1 - \mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}}\; \mathrm{d}\mathbf{z} \\
&\overset{\mathbf{y}=\mathbf{x}+t\mathbf{z}}{=} \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(1 - (\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t})^2)^{\frac{1}{2}}}\; \mathrm{d}\mathbf{y} + t \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{(\nabla g)(\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{(1 - (\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t})^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{t}\; \mathrm{d}\mathbf{y} \\
&= t \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})}{(1 - (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}}\; \mathrm{d}\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Also:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2} \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{t(g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})) + t^2 h(\mathbf{y})}{(t^2 - (\mathbf{y}-\mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

Insgesamt:

thm:2.14 **Theorem II.16.** *Sei $n = 2$,$g \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Dann ist die Lösung von* (II.20) *über*

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{t(g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})) + t^2 h(\mathbf{y})}{(t^2 - (\mathbf{y}-\mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

gegeben.

Bemerkung II.17. *Obiger Ansatz lässt sich auf beliebige gerade Dimensionen verallgemeinern.*

III. Harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In diesem Abschnitt betrachten wir Lösungen der *Laplace-Gleichung*.

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \quad & \mathit{in}\ \Omega \\ u = g \quad & \mathit{auf}\ \partial\Omega \end{aligned} \tag{III.1}$$

eq:laplace

für geeignetes g. Funktionen $u \in C^2(\Omega)$, welche $\Delta u = 0$ in Ω genügen heißen *harmonisch*.

III.1. Grundlagen

Folgende Grundlagen aus Analysis II werden eine wichtige Rolle spielen:

prp:3.1 **Proposition III.1.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit gleichmäßigem C^1-Rand. Dann gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} u = \int_{\partial\Omega} u\nu, \quad u \in C^1(\overline{\Omega})^n, u, \partial_j u \in L^1(\Omega)^n, j = 1, \ldots, n$$

Hier bezeichnet ν die äussere Normale.

Beweis:. *(ÜA)*

cor:3.2 **Korollar III.2.** *(Partielle Integration)*
Unter den Voraussetzungen von (III.1) *gilt*

$$\int_\Omega (\partial_i u)v + \int_\Omega u\partial_i v = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i \ ; u, v \in C^1(\overline{\Omega})\,, v\,, \partial_i v\,, u\,, \partial_i u \in L^1(\Omega)$$

Beweis:. *Sei $i \in 1, ..., n$. Definiere $U : \Omega \to \mathbb{R}^n$ über $U = uve_i$ Dann folgt mit* (III.1)

$$\int_\Omega (\partial_i u)v + \int_\Omega u\partial_i v = \int_\Omega \partial_i(uv) = \int_\Omega \operatorname{div} U = \int_{\partial\Omega} U\nu = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i$$

cor:3.3 **Korollar III.3.** *(Green'sche Formeln)*
Unter den Voraussetzungen von (III.1) *gilt*

(a) $\int_\Omega (\Delta u)v - u\Delta v = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u - u\partial_\nu v$

(b) $\int_\Omega \nabla u \nabla v = -\int_\Omega \Delta v + \int_{\partial\Omega} u\partial_j \nu$

(c) $\int_\Omega \Delta u = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u$

für $u, v \in C^2(\overline{\Omega}) : v,\ \partial_i v,\ \partial_i\partial_j v,\ u\ ,\ \partial_i u,\ \partial_i\partial_j u \in L^1(\Omega)\ i = 1, \ldots, n$

Beweis:. *Mit*

$$\operatorname{div}(\nabla u)v = \operatorname{div}\begin{pmatrix}(\partial_1 u)v\\ \cdot\\ \cdot\\ (\partial_n u)v\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}(\partial_i^2 u)v + \sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)(\partial_i v) = (\Delta u)v + (\nabla u \nabla v)$$

folgt

$$\int_\Omega v\Delta u + \nabla u \nabla v = \int_\Omega \operatorname{div}\left((\nabla u)v\right) = \int_{\partial\Omega}(\nabla u)v\nu = \int_{\partial\Omega}(\partial_\nu u)v \tag{III.2}$$ eq:green1

Analog:

$$\int_\Omega u(\Delta v + (\nabla u a v) = \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu v \tag{III.3}$$ eq:green2

⇒ (a), (b)
(c) (ÜA)

III.2. Eigenschaften von harmonischen Funktionen

III.2.1. Mittelwerteigenschaft

prp:3.4 **Proposition III.4.** *Sei* $u \in C^2(\Omega)$ *harmonisch. Dann gilt*

$$u(\mathbf{x}) = ⨍_{\partial B(\mathbf{x},r)} u = ⨍_{B(\mathbf{x},r)} u \tag{III.4}$$ eq:mwe

für $\mathbf{x} \in \Omega$ *und* $r > 0$ *mit* $B(\mathbf{x}, r) \subset\subset \Omega$. (III.4) *heißt* Mittelwerteigentschaft *auf* Ω

Beweis:. *Setze* $\Phi(r) = ⨍_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})$. *Dann gilt (vgl. Beweis von Lemma II.13)*

$$\Phi'(r) = \frac{r}{n} ⨍_{B(\mathbf{x},r)} (\Delta u) = 0$$

Da u *stetig ist, folgt* $\lim_{r\searrow 0}\Phi(r) = u(\mathbf{x})$, *d.h.*

$$u(\mathbf{x}) = ⨍_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})$$

Mit Kugelkoordinaten folgt weiter

$$\int_{B(\mathbf{x},r)} u = \int_0^r (\int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u)\,\mathrm{d}s = u(\mathbf{x})\int_0^r n\alpha(n)s^{n-1}\,\mathrm{d}s = u(\mathbf{x})\alpha(n)s^n\,\Big|_r^0 = \alpha(n)r^n u(\mathbf{x})$$

Wobei $n\alpha(n)s^{n-1}$ *dem Maß der Kugelschale und* $\alpha(n)r^n$ *dem Maß der Kugel entspricht.*

prp:3.5

Proposition III.5. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit*

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset\subset \Omega$. Dann ist u harmonisch.

Beweis:. *Annahme:* $(\Delta u) > 0$ *für ein* $\mathbf{x_0} \in \Omega$.
Dann existiert ein $r > 0$: $(\Delta u)(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r)$. Nun gilt für Φ wie im Beweis von (III.4) *mit $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$:*

$$0 = \Phi'(r) = \fint_{B(\mathbf{x_0},r)} (\Delta u) > 0 \quad \textit{Widerspruch!}$$

III.2.2. Maximumsprinzip

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets beschränkt.

thm:3.6

Theorem III.6. *Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch. Dann gilt*

(a) $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = \max\limits_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} u(\mathbf{x})$

(b) falls $\mathbf{x_0} \in \Omega$ mit $u(\mathbf{x_0}) = \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x})$ und Ω zusammenhängend
$\Rightarrow u$ ist konstant.

Beweis:. *Sei $\mathbf{x_0} \in \Omega$: $u(\mathbf{x_0}) = M =: \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x})$. Dann folgt mit* (III.4)

$$M = u(\mathbf{x_0}) = \fint_{B(\mathbf{x_0},r)} u \leq M$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $u \equiv M$ in $B(\mathbf{x_0}, r)$. Damit ist die Menge $M = \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) = M\}$ offen und relativ abgeschlossen in Ω. Insbesondere $M \equiv \Omega$ falls Ω zusammenhängend.
(a) folgt aus (b) (ÜA)

rem:3.7

Bemerkung III.7.

(a) Analog zu (III.6) *lässt sich ein Minimumsprinzip beweisen. (ÜA)*

(b) Betrachte eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von (III.1) *für Ω zusammenhängend und $g \geq 0$. Dann folgt $u > 0$ in Ω falls $g \neq 0$*

eindeutig

Theorem III.8. *(Eindeutigkeit) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Sei $g \in C(\partial\Omega)$, $\rho \in C(\Omega)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ von*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \rho \textit{ in } \Omega, \\ u &= g \textit{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{III.5}$$

eq:poisson

Beweis:. *Seien u_1, $u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ Lösungen von III.5. Dann gilt*

$$\begin{aligned} -\Delta(u_1 - u_2) &= 0 \textit{ in } \Omega, \\ u_1 - u_2 &= 0 \textit{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit dem Maximums- und Minimumsprinzip folgt u_1 - u_2 = 0.

III.3. Regularität

thm:mwecinf

Theorem III.9. *$u \in C^2(\Omega)$ besitze die Mittelwertseigenschaft auf Ω. $\Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweis:. *Sei η_ϵ ein radialsymmetrischer Mollifier. Setze $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$ in $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega :\ dist(\mathbf{x},\ \partial\Omega) > \epsilon\}$. $\Rightarrow u^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$. Es gilt nun*

$$\begin{aligned} u^\epsilon(\mathbf{x}) &= \int\limits_\Omega \eta_\epsilon\left(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right)u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int\limits_{B(\mathbf{x},\,\epsilon)} \eta_\epsilon\left(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right)u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} \\ &= \int\limits_0^\epsilon \int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\,r)} \eta_\epsilon\left(r\right)u(r,\,\cdot)dSdr = \int\limits_0^\epsilon \eta_\epsilon \int\limits_{\partial B(x,\,r)} (r)u(r,\,\cdot)dSdr \\ &= \int\limits_0^\epsilon \eta_\epsilon \left|\partial B(x,\,r)\right| u(x)dr = \int\limits_{B(x,\,\epsilon)} \eta_\epsilon(|x-y|)dyu(x) \\ &= u(x),\ x \in \Omega_\epsilon, \end{aligned}$$

d.h. $u \in C^\infty(\Omega)$. Dabei haben wir im vierten Schritt verwendet, dass η_ϵ radialsymmetrisch und somit konstant auf der Kugelschale ist. Außerdem erlaubt die Mittelwertseigenschaft von u den sechsten Schritt.

Bemerkung III.10. *Theorem III.9 sagt nichts über das Verhalten von u am Rand aus.*

III.4. Lokale Abschätzungen für harmonische Funktionen

thm:abschabl

Theorem III.11. *Sei u harmonisch in Ω. Dann gilt*

$$|(\nabla^\alpha)(\mathbf{x_0})| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\,r))} \tag{III.6}$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x_0}, r) \subset\subset \Omega$ und jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k$. Hier ist

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)},\ C_k = \frac{(2^{n-1}nk)^k}{\alpha(n)}.$$

Beweis:. *via Induktion.*
Fall k = 0 folgt aus MWE (ÜA).
Fall k = 1: (Beachte $\partial_i u$ ist harmonisch.) Mit der Mittelwerteigenschaft und Korollar III.2 folgt dann

$$|\partial_i u(\mathbf{x_0})| = \left| \;\fint\limits_{B(\mathbf{x_0},\,\frac{r}{2})} \partial_i u \right| = \left| \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int\limits_{\partial B(\mathbf{x_0},\,\frac{r}{2})} u\nu_i \right| \leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(\mathbf{x_0},\,\frac{r}{2}))}.$$

Hierbei haben wir in letzten Schritt $\left|\partial B(\mathbf{x_0},\, \frac{r}{2})\right| = \frac{r\alpha(n)}{2n}$ *verwendet. Wegen* $x \in \partial B(\mathbf{x_0},\, \frac{r}{2})$ *folgt* $B(\mathbf{x_0},\, \frac{r}{2}) \subseteq B(\mathbf{x_0},\, r) \subseteq \Omega$.

$$\Rightarrow |u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\, r))}\,.$$

$$\Rightarrow |\partial_i u(\mathbf{x_0})| \leq \frac{2n}{r\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\, r))} = \frac{n}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^{n+1} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\, r))}\,.$$

Die Behauptung gelte nun für k-1. Dann gilt für α *mit* $|\alpha| = k$*, dass* $D^\alpha u = \partial_i D^\beta u$ *für ein* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *und* β *mit* $|\beta| =$ *k-1. Wie oben gilt*

$$|\nabla^\alpha u(\mathbf{x_0})| \leq \frac{nk}{r} \left\|D^\beta u\right\|_{L^\infty(\partial B(\mathbf{x_0},\, \frac{r}{k}))}$$

und für $x \in \partial B(\mathbf{x_0},\, \frac{r}{k})$ *gilt* $B(\mathbf{x},\, \frac{k-1}{k}r) \subseteq B(\mathbf{x_0},\, r) \subseteq \Omega$*. Wie oben folgt mit (ÜA)*

$$\left|(D^\beta u)(\mathbf{x})\right| \leq \frac{\left(2^{n+1}n(k-1)\right)^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\, r))}\,,$$

$$|(\nabla^\alpha u)(\mathbf{x_0})| \leq \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,\, r))}\,.$$

III.5. Liouville

Liouville

Theorem III.12. *Sei* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *harmonisch und beschränkt. Dann ist* u *konstant.*

Beweis:. *Sei* $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$*. Dann folgt mit Satz III.11*

$$|(\nabla u)(\mathbf{x_0})| \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\, r))} \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \alpha(n) r^n \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{C}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,,$$

d.h. $|(\nabla u)(\mathbf{x_0})| = 0$ *folgt für* $r \to \infty$*. Dann ist* u *konstant.*

III.6. Analytische versus harmonische Funktionen

analytisch

Theorem III.13. *Sei* u *harmonisch in* Ω*, d.h. für alle* $\mathbf{x_0} \in \Omega$ *existiert ein* $x > 0$*, sodass*

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^n}{n!} (D^\alpha u)(\mathbf{x_0}),\ \mathbf{x} \in B(\mathbf{x_0},\, r).$$

Beweis:. *Beweisidee: Zeige mithilfe von III.11, dass die Taylorreihe konvergiert. (ÜA)*

III.7. Harnack-Ungleichung

thm:harmungl

Theorem III.14. *Sei $V \subset\subset \Omega$ zusammenhängend. Dann existiert ein $C > 0$, welches nur von V abhängt, sodass*

$$\sup_{\mathbf{x}\in V} u(\mathbf{x}) \leq C \inf_{\mathbf{x}\in V} \cdot u(\mathbf{x})$$

für alle nicht-negativen harmonischen Funktionen $u \in C^2(\Omega)$ gilt. Insbesondere ist für alle $x, y \in V$ erfüllt:

$$\frac{1}{C} \cdot u(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x}) \leq C \cdot u(\mathbf{y}).$$

Beweis:. *Sei $r := \frac{1}{4} dist(V, \partial\Omega)$. Wähle $x, y \in V$ mit $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq r$. Dann gilt*

$$u(\mathbf{x}) \overset{MWE}{=} \fint_{B(\mathbf{x},\, 2r)} u(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mathbf{z} \geq \frac{1}{\alpha(n) 2^n r^n} \int_{B(\mathbf{y},\, r} u(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mathbf{z} = \frac{1}{2^n} \fint_{B(\mathbf{y},\, r} u(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mathbf{z} \overset{MWE}{=} \frac{1}{2^n} u(\mathbf{y}).$$

$$\Rightarrow 2^n u(\mathbf{y}) \geq u(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2^n} u(\mathbf{y}), \;\; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \;\; |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r.$$

Überdecke $\bar{V}$ mit endlich vielen Kugeln mit Radius $\frac{r}{2}$. ($V \subset\subset \Omega$) und $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ für $i = 2, \ldots, N$. Dann folgt $u(x) \geq \frac{1}{2^{nN}} u(y)$ für alle x,y $\in$ V.

In den folgenden Abschnitten werden wir eine Darstellung der Lösung der *Poisson-Gleichung*

$$\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n \tag{III.7}$$

eq:poiss

der Form $u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} = (k * f)(\mathbf{x})$ mit einer geeigneten Funktion k herleiten. Die Funktion k heißt *Fundamentallösung*. Im nächsten Abschnitt diskutieren wir zunächst einige benötigte Resultate aus der Distributionentheorie.

IV. Einführung in die Distributionentheorie

IV.1. Der Raum der Testfunktionen D(Ω)

In diesem Kapitel sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets offen. Wir setzen

$$\mathrm{D}(\Omega) = \{u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega) : \text{ supp u ist kompakt}\} = \mathrm{C}_c^\infty(\Omega).$$

Eine Funktion $\varphi \in \mathrm{D}(\Omega)$ heiße Testfunktion.

Beispiel IV.1. *φ definiert über*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \|\mathbf{x}\| < 1, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| \geq 1, \end{cases}$$

ist eine Testfunktion mit $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Definition & Lemma IV.2. *Sei $(\varphi_j) \in D(\Omega)$ und $\varphi \in D(\Omega)$. Dann ist $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j = \varphi$ in $D(\Omega)$ $:\Leftrightarrow$*

(i) $\exists K \Subset \Omega$ *mit* $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$, $j \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty} \|D^\alpha(\varphi_j - \varphi)\| = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

grenzwert

Theorem IV.3. *Seien (φ_j), $(\psi_j) \subset D(\Omega)$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j = \varphi$ und $\lim\limits_{j\to\infty} \psi_j = \psi$ für φ, $\psi \in D(\Omega)$. Dann gilt*

(a) $\lim\limits_{j\to\infty} (\alpha\varphi_j + \beta\psi_j) = \alpha\varphi + \beta\psi$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(b) $\lim\limits_{j\to\infty} \nabla^\alpha \varphi_j = \nabla^\alpha \varphi$, *für alle* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, *d.h* $\nabla^\alpha : D(\Omega) \to D(\Omega)$ *ist stetig.*

Definition & Lemma IV.4. *Setze $D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \mathbb{C} : T \text{ linear und stetig}\}$, wobei*

$$T : D(\Omega) \to \mathbb{C} \textit{ stetig } :\Leftrightarrow \lim_{j\to\infty} \varphi_j = \varphi in D(\Omega) \Rightarrow \lim_{j\to\infty} T\varphi_j = T\varphi.$$

Wir schreiben

$$< T, \ \varphi > := T(\varphi).$$

$T \in D'(\Omega)$ heißt Distribution.

thm:linearedistr

Theorem IV.5. *Sei $T : D(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear. Dann sind äquivalent:*

(a) $T \in D'(\Omega)$,

(b) $\forall K \Subset \Omega \exists C > 0, N(K,T): \; |T\varphi| \leq C \cdot \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty$, $\varphi \in D(\Omega)$
mit supp $\varphi_N \subset K$.

Beweis:. (a) $\Rightarrow$ (b):
Annahme: Die Behauptung ist falsch. Dann existiert $K \Subset \Omega$ *so, dass für alle* $N \in \mathbb{N}$ *ein* $\varphi_N \in D(\Omega)$ *mit*

$$\operatorname{supp} \varphi_N \subset K \text{ und } |T\varphi_n| > N \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi_N\|_\infty$$

existiert. Setze $\phi_N = \varphi_N / |T\varphi_n|$. *Dann gilt* $\lim_{N\to\infty} \phi_N = 0$, *aber* $|T\phi_N| = \frac{T\varphi_N}{|T\varphi_N|} = 1$, *was einen Widerspruch zur Stetigkeit darstellt.*
(b) $\Rightarrow$ (a): *(ÜA).*

Bemerkung IV.6. *In der Situation von Satz IV.5 heißt* T von der Ordnung N auf K. *Fall T von der Ordnung N ist für alle* $K \subset \Omega$ *kompakt, so heißt T von der* Ordnung N auf Ω.

Beispiel IV.7. **(a)** *Die* Dirac'sche δ_a-Distribution. *Für* $a \in \Omega$ *setze* $\langle \delta_a, \; \varphi \rangle := \varphi(a)$, $\varphi \in D(\Omega)$. *Falls* $0 \in \Omega$ *schreiben wir* $\delta_0 = \delta$.

(b) *Der* Cauchy-Hauptwert.
Sei $\Omega = \mathbb{R}$. *Wir setzen*

$$\left\langle (pv)(\frac{1}{x}), \; \varphi \right\rangle := \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x|>0} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \; \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Beachte: $\frac{1}{x} \notin L_{loc}(\mathbb{R})$.

(c) *Sei* $\Omega = \mathbb{R}$. $\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \; \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\epsilon} \varphi(x) dx.$

(d) *Für* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *ist* $T_f : \; D(\Omega) \to \mathbb{C}$ *definiert über*

$$\langle T_f, \; \varphi \rangle := \int\limits_\Omega f\varphi dx.$$

Beweis:. *(b) Sei* $(\varphi_j) \subset D(\Omega)$ *mit* $\lim_{j\to\infty} \varphi_j = 0$. *Dann existiert ein* $a > 0$, *sodass supp* $\varphi \subseteq [-a, \; a]$, $j \in \mathbb{N}$. *Es gilt nun*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{\epsilon\to 0} \left[\varphi_j(0) \int\limits_{\epsilon\leq|x|\leq a} \frac{1}{x} dx + \int\limits_{\epsilon\leq|x|\leq a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx \right]$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-a}^{0} \left\|\varphi_j'\right\|_\infty dx = 2a \left\|\varphi_j'\right\|_\infty \ \to 0 \text{ für } j \to \infty.$$

(d)Sei $(\varphi_j) \subset D(\Omega)$ mit $\lim_{j\to\infty} \varphi_j = 0$ in $D(\Omega)$. Dann existiert ein $K \subset \Omega$ kompakt mit supp $\varphi_j \subset K$, $j \in \mathbb{N}$ und $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_\infty = 0$. Weiter gilt

$$\lim_{j\to\infty} |\langle T_f,\ \varphi_j\rangle| = \lim_{j\to\infty} \left|\int_K f\varphi_j dx\right| \leq \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_\infty \int_K f dx = 0.$$

(a), (c) (ÜA).

susTfnull **Theorem IV.8.** *Es gilt $T_f = 0$ in $D'(\Omega)$ genau dann, wenn $f \equiv 0$ fast überall.*

Beweis:. *Die Rückrichtung ist klar.*
$' \Rightarrow'$: Sei $T_f = 0$ in D'(Ω). Dann gilt für $K \subset\subset \Omega$, dass $\int_K f\varphi dx = 0$, $\varphi \in C_c^\infty(K)$. Da $f \in$ D'(K) folgt $f \equiv 0$ fast überall (ÜA).

IV.2. Elemetare Operationen mit Distributionen

IV.2.1. Multiplikation mit einer Funktion

Sei $a \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$. Wir definieren $\langle aT, \varphi\rangle = \langle T, a\varphi\rangle$, $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$.

Beispiel IV.9. **(a)** *Sei $a \in C^\infty(\Omega)$ mit $0 \in \Omega$. Dann gilt $a\delta = a(0)\delta$, denn*

$$\langle a\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, a\varphi\rangle = a(0)\varphi(0) = \langle a(0)\delta, \varphi\rangle, \quad \varphi \in D(\Omega).$$

(b) *Es gilt $xpv(\frac{1}{x}) = T_{\mathbb{1}}$, denn*

$$\left\langle xpv(\frac{1}{x}), \varphi \right\rangle = \left\langle pv(\frac{1}{x}), x\varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\epsilon} \frac{1}{x} x\,\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}\varphi = \langle T_{\mathbb{1}},\ \varphi\rangle,\ \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

IV.2.2. Ableitung der Distribution

Nach Satz IV.3 (b) ist $\nabla^\alpha :\ \mathrm{D}(\Omega) \to \mathrm{D}(\Omega)$ stetig. Wir definieren für $T \in$ D'(Ω) und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\langle \nabla^\alpha T,\ \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \nabla^\alpha \varphi\rangle,\ \varphi \in \mathrm{D}(\Omega). \tag{IV.1}$$ eq:diffDist

Bemerkung IV.10. **(a)** *Sei $f \in C^\infty(\Omega)$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, dass*

$$\langle \nabla^\alpha T_f,\ \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f,\ \nabla^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f\nabla^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (\nabla^\alpha f)\varphi = \langle T_{\nabla^\alpha f},\ \varphi\rangle,\ \varphi \in D(\Omega).$$

(b) *$\nabla^\alpha \in \mathcal{L}(D'(\Omega))$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, da ∇^α linear und stetig ist. (ÜA)*

(c) Leibnitz-Regel
Sei $a \in C^\infty(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$. Dann gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, dass $aT \in D'(\Omega)$ und

$$\nabla^\alpha(aT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\nabla^\beta a)(\nabla^{\alpha-\beta} T).$$

(d) *Sei $f \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gilt $\nabla^\alpha T_f = T_{\nabla^\alpha f}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$.*

Beispiel IV.11. **(a)** *Die* Heaviside-Funktion

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ist ein Element aus $D'(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left\langle H',\ \varphi \right\rangle &= -\left\langle H,\ \varphi' \right\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = -\varphi(x)|_0^\infty \\ &= \varphi(0) = \langle \delta,\ \varphi \rangle,\ \varphi \in D(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(b) *Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gilt*

$$\langle D^\alpha \delta,\ \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta,\ D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha \varphi)(0),\ \varphi \in D(\Omega).$$

(c) $(\log(|x|))' = \mathrm{pv}(\frac{1}{x})$, *denn*

$$\left\langle (ln(|x|))',\ \varphi \right\rangle = -\left\langle ln(|x|),\ \varphi' \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} ln(|x|)\varphi'(x)dx$$

$$= -\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} ln(|x|)\varphi'(x)dx + \int_\epsilon^\infty ln(|x|)\varphi'(x)dx \right)$$

$$\overset{PI}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} -\frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi'(-\epsilon) ln(\epsilon) + \varphi'(\epsilon) ln(\epsilon) \right)$$

$$\underset{\eta \in (-\epsilon,\epsilon)}{\overset{MWS}{=}} \left\langle pv(\frac{1}{x}),\ \varphi) \right\rangle + \lim_{\epsilon \to 0} \left[ln(\epsilon) 2\epsilon \varphi''(\eta) \right] = \left\langle pv(\frac{1}{x}),\ \varphi) \right\rangle,\ \varphi \in D(\Omega).$$

IV.2.3. Der adjungierte Operator

Sei $A = \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ und $T \in$ D'(Ω). Dann gilt

$$\langle AT,\ \varphi\rangle = \left\langle \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha T,\ \varphi \right\rangle \overset{\text{IV.1}}{=} \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \langle T,\ a_\alpha D^\alpha \varphi\rangle = \left\langle T,\ \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|},\ a_\alpha D^\alpha \varphi \right\rangle$$

$$= \langle T,\ A^*\varphi\rangle\,,\ \varphi \in \mathrm{D}(\Omega).$$

$A^* := \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$ heißt der zu A *adjungierte Operator* .

Beispiel IV.12. $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$. *Dann gilt* $\Delta = \Delta^*$.

IV.3. Faltung

Für $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ sei $(\tau_\mathbf{a}\varphi)(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Wir definieren die Translation von $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \tau_\mathbf{a} T, \varphi\rangle := \langle T, \tau_{-\mathbf{a}}\varphi\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Weiter sei $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(-\mathbf{x})$ für $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\langle \tilde{T}, \varphi\rangle := \langle T, \tilde{\varphi}\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Spiegelung.

:Faltung **Definition IV.13.** Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren die Faltung $T * \varphi$ via

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_\mathbf{x}\varphi\rangle.$$

Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt (ÜA)

$$(f * g)(x) = T_f(\tilde{\tau}_\mathbf{x} g).$$

Beispiel IV.14. *Es gilt*

$$(\delta * \varphi)(\mathbf{x}) =< \delta, \tilde{\tau}_\mathbf{x}\varphi >= (\tilde{\tau}_\mathbf{x}\varphi)(0) = \varphi(\mathbf{x}),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

d.h. $\delta * \varphi = \varphi$.

FaltDiff **Theorem IV.15.** *Sei* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *Dann gilt* $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $\partial_j(T * \varphi) = (\partial_j T) * \varphi = T * (\partial_j \varphi), j = 1, \ldots, n.$

Beweis:. *<u>Schritt 1:</u> $T * \varphi$ ist stetig*
Für $\mathbf{x}, \mathbf{x}^{'} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi(\mathbf{y}) - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}^{'} - \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere folgt:

$$\lim_{\mathbf{x}' \to \mathbf{x}} \tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi = \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \textit{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \textit{d.h.}$$

$$\lim_{\mathbf{x}' \to \mathbf{x}} \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi \rangle = \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle.$$

Also

$$\lim_{\mathbf{x}' \to \mathbf{x}} (T * \varphi)(\mathbf{x}^{'}) = (T * \varphi)(\mathbf{x}).$$

<u>Schritt 2:</u>
Sei $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Dann gilt für $\mathbf{x}, \mathbf{x}^{'} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = \frac{1}{h}[\varphi(\mathbf{x} + he_i - y) - \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y})],\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

d.h.

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) \textit{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), i = 1, \ldots, n.$$

Also:

$$\begin{array}{rcc} \partial_i(T * \varphi)(\mathbf{x}) & = & \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} < T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi > \\ & = & \lim_{h \to 0} < T, \frac{1}{h}\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi > \\ & = & < T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) > \\ & = & (T * (\partial_i\varphi))(\mathbf{x}),\ i = 1, \ldots, n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \end{array}$$

$\Rightarrow \partial_i(T * \varphi)(\mathbf{x}) = (T * \partial_i\varphi)(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$
$\Rightarrow \partial_i(T * \varphi)$ *stetig in* $\mathbb{R}^n$.
$\Rightarrow T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$

<u>Schritt 3:</u>
Wegen

$$\partial_{\mathbf{y}_i}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_{\mathbf{x}_i}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, n$$

folgt

$$\partial_{\mathbf{x}_i}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = -\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_{\mathbf{x}_i}\varphi)\ i = 1, \ldots, n$$

und damit

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}_i}(T * \varphi)(\mathbf{x}) &= (T * \partial_i\varphi)(\mathbf{x}) = \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) \rangle = -\langle T, \partial_{\mathbf{x}_i}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) \rangle \\ &= \langle \partial_i T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle = ((\partial_i T) * \varphi)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

IV.4. Fundamentallösung

Sei $A = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$. Dann gilt für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

ist eine Lösung im Sinne von Distributionen, da

$$Au = A(T * f) = (AT * f) = (\delta * f) = f.$$

Fundloes **Definition IV.16.** Sei $A = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$. Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$ heißt *Fundamentallösung* von A in $\mathbb{R}^n$.

V. Fundamentallösungen

In diesem Abschnitt berechnen wir einige Fundamentallösungen explizit. Im Allgemeinen kann man allerdings nicht erwarten, dass eine Fundamentallösung explizit berechnet werden kann.

m:Lap-Op **Theorem V.1** (Laplace-Operator)**.** *Für* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *setze*

$$N(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)}|\mathbf{x}|^{2-n} & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} log|\mathbf{x}| & n = 2 \\ \frac{1}{2}|\mathbf{x}| & n = 1 \end{cases}$$

Dann ist $N \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *und es gilt*

$$\Delta N = \delta \text{ (i. S. v. Distributionen).}$$

Beweis:. *Sei* $n \geq 3$. *Für* $\epsilon > 0$ *setze*

$$N^\epsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{2-n}{2}}.$$

Dann gilt: $N^\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\begin{aligned} \partial_j N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{2-n}{2}-1}\frac{2-n}{2}2\mathbf{x}_j = \frac{1}{n\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}}\mathbf{x}_j \\ \partial_j^2 N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{n}{2}(|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1}2\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j + \frac{1}{n\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}} \\ &= \frac{-1}{\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1}\mathbf{x}_j^2 + \frac{1}{n\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}} \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1}[-n\mathbf{x}_j^2 + (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)], \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Mit Lebesgue folgt:

$$\lim_{\epsilon \to 0}\langle N - N^\epsilon, \Delta\varphi\rangle = 0, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Weiter gilt

$$\langle N^\epsilon, \Delta\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} N^\epsilon \Delta\varphi = \int_{\mathbb{R}^n}(\Delta N^\epsilon)\varphi, \; \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\begin{aligned}\Delta N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \partial_i^2 N^\epsilon(\mathbf{x})\\ &= \frac{1}{n\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2+\epsilon)^{\frac{-n}{2}-1}[-n|\mathbf{x}|^2+n|\mathbf{x}|^2+n\epsilon^2]\\ &= \frac{1}{\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2+\epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1}\epsilon^2 =: \rho^\epsilon(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1}{\epsilon^n}\rho^1(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}) = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{\alpha(n)}((\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon})^2+1)^{\frac{-n}{2}-1} = \frac{1}{\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2+\epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1}\epsilon^2 = \rho^\epsilon(x)$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\rho^1(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\alpha(n)}(|\mathbf{y}|^2+1)^{\frac{-n}{2}-1}\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int\limits_0^\infty n\frac{r^{n-1}}{(r^2+1)^{\frac{n}{2}+1}}\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty n\frac{s^{\frac{n-2}{n}}}{(s+1)^{\frac{n}{2}+1}}\,\mathrm{d}s = \frac{n}{2}\beta(\frac{n}{2},1) = \frac{n}{2}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = 1\end{aligned}$$

ist f^ϵ ist ein Mollofier. Daraus folgt:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon(-\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle, \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Fall n=1,2 (ÜA).

thm:Wellengl

Theorem V.2. *(Wellengleichung) Sei $E:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert über*

$$E(t,x) = \begin{cases}\frac{1}{2} & t>|x|\\ 0 & t\le|x|\end{cases}.$$

Dann ist $E\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\partial_t^2 E - \partial_x^2 E = \delta.$$

Beweis:. *(ÜA)*

VI. Greenfunktionen

In diesem Abschnitt sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ stets offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, && \text{in } \Omega, \\ u &= g, && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{VI.1}$$

eq:VI.1

VI.1. Herleitung der Greenfunktion

sec:HdG

Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ beliebig und seien $\mathbf{x} \in \Omega$ und $\epsilon > 0$ so, dass $B(\mathbf{x}, \epsilon) \subset \Omega$. Weiter sei N die Fundamentallösung des Δ und $V_\epsilon := \Omega \backslash B(x, \epsilon)$. Mit der Green'schen Formel folgt:

$$\int\limits_{V_\epsilon} u(\mathbf{y})(\Delta N)(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y} \tag{VI.2}$$

eq:VI.2

$$= \int\limits_{\partial V_\epsilon} u(\mathbf{y})\partial_\nu N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \tag{VI.3}$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale auf ∂V_ϵ ist.

Wegen $\Delta N(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0$ für $x \neq y$ ergibt sich mit der Darstellung der Fundamentallösung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) \ \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \right| &\leq c\epsilon^{n-1} \max_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} |N| \\ &\leq c\epsilon^{n-1} \begin{cases} \epsilon^{2-n} & n \geq 3 \\ |\log \epsilon| & n = 2 \\ |\epsilon| & n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Weiterhin gilt $\nabla N(\mathbf{y}) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n}$ für $y \neq 0$ (Ü.A.) und es folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} u(\mathbf{y}) \partial_\nu N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \; \mathrm{d}S(\mathbf{y}) &= - \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \; \nu \cdot \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n} \; \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \cdot \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n} \; \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{y}|^{n-1}} \; \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \; \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= \fint\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} u(\mathbf{y}) \; \mathrm{d}S(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Damit können wir in (VI.2) zum Grenzwert $\epsilon \to 0$ übergehen und erhalten:

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \partial_\nu N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \; \mathrm{d}S(\mathbf{y}) - \int\limits_{\Omega} N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) \; \mathrm{d}y. \tag{VI.4}$$

`eq: 3`

Gleichung (VI.4) erlaubt uns u zu bestimmen, falls wir Δu in Ω und u, $\partial_\nu u$ auf $\partial\Omega$ kennen. Leider gibt uns (VI.1) keine Informationen über $\partial_\nu u$ auf $\partial\Omega$. Wir würden allerdings unsere PDE überbestimmen, wenn wir die Werte von $\partial_\nu u$ auf $\partial\Omega$ zusätzlich vorschreiben würden. Daher gehen wir folgender Idee nach:

Idee. *Finde für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ eine Funktion $N^{\mathbf{x}} = N^{\mathbf{x}}(y)$ mit den Eigenschaften*

$$\begin{aligned}
\Delta N^{\mathbf{x}} &= 0, && \text{in } \Omega, \\
N^{\mathbf{x}} &= N(\mathbf{y}-\mathbf{x}), && \text{auf } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Angenommen wir haben eine solche Funktion bereits gefunden. Mit den Greenschen Formeln folgt dann

$$\begin{aligned}
- \int\limits_{\Omega} N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \; \mathrm{d}\mathbf{y} &= \int\limits_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \partial_\nu N^{\mathbf{x}}(y) - N^{\mathbf{x}}(y) \partial_\nu u(\mathbf{y}) \; \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \partial_\nu N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) \; \mathrm{d}S(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

und damit erhalten wir aus (VI.4) die Darstellung

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) = &\int\limits_{\partial\Omega} N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\partial_\nu N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) - \int\limits_{\Omega} N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y} \\
&- \int\limits_{\partial\Omega} N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) \,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) + \int\limits_{\partial\Omega} u(\mathbf{y})\partial_\nu N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) + \int\limits_{\Omega} N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y} \\
= &- \int\limits_{\partial\Omega} u(\mathbf{y})\partial_\nu \left(N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\right) \,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) - \int\limits_{\Omega} \left(N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\right)\Delta u(\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y},
\end{aligned}
$$

welche den ungeliebten Term $\partial_\nu u$ nicht mehr enthält. Diese führt uns zur Definition der Greenfunktion.

Definition VI.1. Die Funktion $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, heißt *Greenfunktion in* Ω. Setzen wir die Definition von G in obige Darstellung von u ein, so sehen wir, dass in diesem Fall ist die Lösung von (VI.1)durch

$$
u(\mathbf{x}) = - \int\limits_{\partial\Omega} g(\mathbf{y})\partial_\nu G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) - \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{VI.5}
$$
eq: 4

gegeben ist.

Bemerkung VI.2. *Sei* $\mathbf{x} \in \Omega$. *Dann erfüllt* $G_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ *die Gleichung*

$$
\begin{aligned}
-\Delta G_{\mathbf{x}} &= \delta_{\mathbf{x}}, \quad && \text{in } \Omega, \\
G_{\mathbf{x}} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Beweis:. *Ü.A.*

VI.2. Eigenschaften der Greenfunktion

hm: VI.3 **Theorem VI.3.** *Für* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Omega$ *mit* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ *gilt* $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

Beweis:. *Wir schreiben* $G_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = G(\mathbf{x},\mathbf{z})$ *und* $G_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) = G(\mathbf{y},\mathbf{z})$ *für* $\mathbf{z} \in \Omega$. *Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
\Delta G_{\mathbf{x}} &= 0, \quad && z \neq x, \\
\Delta G_{\mathbf{y}} &= 0, && z \neq y, \\
G_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) &= 0, && \text{auf } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Setze $V = \Omega \setminus \{B(\mathbf{x},\epsilon) \cup B(\mathbf{y},\epsilon)\}$ *für* $\epsilon > 0$ *klein genug. Mit den Greenschen Formeln und obigen Eigenschaften von* $G_{\mathbf{x}}$ *und* $G_{\mathbf{y}}$ *folgt:*

$$
\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} \left(\partial_\nu G_{\mathbf{x}}\right) G_{\mathbf{y}} - \left(\partial_\nu G_{\mathbf{y}}\right) G_{\mathbf{x}} \,\mathrm{d}S(\mathbf{z}) = \int\limits_{\partial B(\mathbf{y},\epsilon)} \left(\partial_\nu G_{\mathbf{y}}\right) G_{\mathbf{x}} - \left(\partial_\nu G_{\mathbf{x}}\right) G_{\mathbf{y}} \,\mathrm{d}S(\mathbf{z}).
$$

Da $G_{\mathbf{y}}$ glatt nahe bei $\mathbf{x}$ ist, gilt analog zu Abschnitt VI.1.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} (\partial_\nu G_{\mathbf{y}})\, G_{\mathbf{x}}\, \mathrm{d}S(\mathbf{z})\right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} c\epsilon^{n-1} \sup_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} |G_{\mathbf{x}}| = 0$$

und da $G_{\mathbf{x}} = N(\mathbf{x}-\mathbf{z}) - N^{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ mit $N^{\mathbf{x}}$ glatt in Ω gilt, erhalten wir mit der aus Abschnitt VI.1 bekannten Rechnung:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} (\partial_\nu G_{\mathbf{x}})\, G_{\mathbf{y}}\, \mathrm{d}S(\mathbf{z}) = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} \partial_\nu N(\mathbf{x}-\mathbf{z}) G_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})\, \mathrm{d}S(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}).$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} (\partial_\nu G_{\mathbf{x}})\, G_{\mathbf{y}} - (\partial_\nu G_{\mathbf{y}})\, G_{\mathbf{x}}\, \mathrm{d}S(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

und völlig analog natürlich auch

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\partial B(\mathbf{y},\epsilon)} (\partial_\nu G_{\mathbf{y}})\, G_{\mathbf{x}} - (\partial_\nu G_{\mathbf{x}})\, G_{\mathbf{y}}\, \mathrm{d}S(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Erinnern wir uns jetzt noch daran, dass nach dem ersten Schritt des Beweis beide Limiten gleich sind, folgt wie gewünscht $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

VI.3. Die Greenfunktion im Halbraum

In diesem Abschnitt bezeichne N wieder die Fundamentallösung von Δ in $\mathbb{R}^n$. Wie in Abschnitt VI.1 gezeigt, müssen wir für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ eine Funktion $N^{\mathbf{x}} = N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta N^{\mathbf{x}} &= 0, && \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ N^{\mathbf{x}} &= N(\mathbf{y}-\mathbf{x}), && \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+, \end{aligned}$$

bestimmen, um die Greenfunktion im Halbraum angeben zu können.

Idee (Reflexion)**.** *Setze $N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = N(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})$, wobei $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n)$ die Spiegelung von x an $\partial\mathbb{R}^n_+$ ist.*

Wegen $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+$ gilt damit $\Delta N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Delta_{\mathbf{y}} N(\mathbf{y}-\mathbf{x}\ ) = 0$ für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+$ und nach Definition gilt $N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = N(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) = N(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ für $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Diese Beobachtung liefert uns unmittelbar

Theorem VI.4. *Die Greenfunktion in $\mathbb{R}^n_+$ ist $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = N(\mathbf{y}-\mathbf{y}) - N(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.*

Beweis:. *Ü.A.*

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ u &= g, \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{aligned} \tag{VI.6}$$ `eq: 5`

Eine direkte Rechnung zeigt zunächst:

$$\partial_{\mathbf{y}_n} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \partial_{\mathbf{y}_n} N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \partial_{\mathbf{y}_n} N(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{n\alpha(n)}\left[\frac{y_n - x_n}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}|^n}\right].$$

Damit folgt

$$\partial_\nu G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\partial_{\mathbf{y}_n} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}, \quad \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+,$$

und Formel (VI.5) liefert und eine Darstellung der Lösung u von (VI.6) :

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\,\mathrm{d}\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+. \tag{VI.7}$$ `eq: 6`

Die Funktion $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}$ definiert für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ heißt *Poissonkern*. Es gilt nun

Theorem VI.5. *Sei $g \in BC(\mathbb{R}^{n-1})$ und u durch* (VI.7) *gegeben. Dann gilt*

(a) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

(b) $\Delta u = 0$ *in* $\mathbb{R}^n_+$.

(c) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0)$ *für* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n_+$.

Beweis:. *Wir unterteilen den Beweis in 3 Schritte.*

<u>Schritt 1</u>: Sei $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ fest. Dann ist $\mathbf{y} \mapsto G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ harmonisch für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\mathbf{x}\}$. Wegen Satz VI.3 gilt $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$, so dass für $\mathbf{y} \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ harmonisch für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\mathbf{y}\}$. Insbesondere ist $\mathbf{x} \mapsto K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\partial_{\mathbf{y}_n} G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ harmonisch für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$.

<u>Schritt 2</u>: Es gilt (Ü.A. für Freunde des Rechnens):

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = 1.$$

Insbesondere erhalten wir für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ die Abschätzung

$$|u(\mathbf{x})| = \left|\int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y})g(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\right| \le \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)} \|K(\mathbf{x},\cdot)\|_{L^1(\partial\mathbb{R}^n_+)} = \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)}.$$

Dies liefert uns $\|u\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)} \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)}$. *Da* $\mathbf{x} \mapsto K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *harmonisch für* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ *folgt* $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ *(Ü.A.). Daher gilt*

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Delta_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+.$$

Es bleibt also nur noch (c) zu zeigen.

Schritt 3: Sei $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$ *und* $\epsilon > 0$. *Wähle* $\delta > 0$ *derart, dass für alle* $|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0| < \epsilon$ *für* $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ *mit* $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| \leq \delta$ *gilt. Damit folgt:*

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| &= \left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \left[g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x_0})\right] \,\mathrm{d}\mathbf{y} \right| \\ &\leq \left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B(\mathbf{x}_0,\delta)} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \left[g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x_0})\right] \,\mathrm{d}\mathbf{y} \right| \\ &\quad + \left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(\mathbf{x}_0,\delta)} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \left[g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x_0})\right] \,\mathrm{d}\mathbf{y} \right| \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Nach Wahl von δ *gilt*

$$I_1 \leq \epsilon \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y} = \epsilon.$$

Den zweiten Term schätzen wir für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ *mit* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ *durch*

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2\,\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(\mathbf{x}_0,\delta)} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y} \\ &\leq 2\,\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)} \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(\mathbf{x}_0,\delta)} \frac{2^n}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|^n} \,\mathrm{d}\mathbf{y} = c x_n \end{aligned}$$

ab, wobei wir genutzt haben, dass für $\mathbf{x}$ *wie oben und* $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(\mathbf{x}_0,\delta)$ *nach umgekehrter Dreiecksungleichung* $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|$ *gilt. Für* $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ *folgt somit* $I_1 + I_2 \to 0$ *und wir haben auch (c) nachgewiesen.*

VII. Allgemeinere Differentialoperatoren

In diesem Abschnitt stellen wir einige allgemeine Resultate über Fundamentallösungen dar. Ihre Beweise würden allerdings den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.

thm:7.1 **Theorem VII.1.** *(Malgrange-Ehrenpreis, siehe [Ehr54], [Ehr55], [Mal54], [Mal56]) Sei $A = \sum_{|\alpha|\leq n} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Fundamentallösung für A.*

Beweis:. *ohne Beweis.*

Betrachte einen Differentialoperator L der Form

$$Lu = \partial_t u - A(t, x, \nabla_x u)u$$

mit $A(t, x, \nabla_x u) = \sum_{|k|=2m} a_k(t, x)\nabla_x^k + \sum_{|k|<2m} a_k(t, x)\nabla_x^k$, $a_k \in C^{l+\alpha,(2+\alpha)2m}(Q)$, wobei $Q = [0, T_0] \times \bar{\Omega}$, für ein $l \in \mathbb{N}, \alpha \in (0, 1)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{2m+l+\alpha}$. Wir betrachten für $\tau \geq 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,\mathbf{x}) - A(t,\mathbf{x},\nabla_x u)u(t,\mathbf{x}) &= f(t,\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in \Omega,\ t > \tau, \\ u(t,\mathbf{x}) &= 0, && \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ t > \tau, \\ u(\tau,\mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \tag{VII.1}$$

eq:VII.1

dfn:7.2 **Definition VII.2.** (a) Sei A wie oben. Dann heißt A gleichmäßig *elliptisch*, falls $\sum_{|k|=2m} a_k(t, \mathbf{x})\xi_{k_1}..\xi_{k_n} \geq \alpha_0 |\xi|^{2m}$ mit $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, t \in [0, T_0], \mathbf{x} \in \Omega$ für ein $\alpha_0 > 0$.

(b) Sei L wie oben. Dann heißt L (gleichmäßig) *parabolisch* falls A gleichmäßig elliptisch ist.

Die Greenfunktion von (VII.1) erfüllt dann über

$$\begin{aligned} \partial_t G(t,\mathbf{x},\tau,\boldsymbol{\xi}) - A(t,\mathbf{x},\nabla_x u)G(t,\mathbf{x},\tau,\boldsymbol{\xi}) &= 0, && \mathbf{x} \in \Omega,\ t > \tau, \\ u(t,\mathbf{x}) &= 0, && \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ t > \tau, \\ u(\tau,\mathbf{x}) &= \delta_{\boldsymbol{\xi}}, && \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

definiert. Falls G existiert und *schön* genug ist, ist die Lösung u von (VII.1) durch

$$u(t,x) := \int_0^t \int_\Omega G(t,\mathbf{x},\tau,\boldsymbol{\xi})f(\tau,\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\tau + \int_\Omega G(t,\mathbf{x},\tau,\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}, \quad t > \tau,\ x \in \Omega,$$

gegeben.

thm: 7.3 **Theorem VII.3** ([ÈdI70]). *Sei L gleichmäßig parabolisch. Dann existiert eine Greenfunktion $G : Q \times Q \to \mathbb{R}$ von Problem* (VII.1). *Dann existieren $C, c > 0$:*

$$\left|\partial_t^{k_0}\nabla_{\mathbf{x}}^k G(t,\mathbf{x},\tau,\xi)\right| \leq C(t-\tau)^{-\frac{n+2mk_0+|k|}{2m}} e^{-c\left(\frac{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^{2m}}{|t-\tau|}\right)^{\frac{1}{q}}},$$
$$2mk_0+|k|<2m+l,\ (t,\mathbf{x}),(\tau,\boldsymbol{\xi})\in Q,$$
$$\left|\partial_t^{k_0}\nabla_x^l G(t,\mathbf{x},\tau,\boldsymbol{\xi}) - \partial_t^{k_0}\nabla_{\mathbf{x}}^l G(t,\mathbf{x}_0,\tau,\boldsymbol{\xi})\right| \leq C\left|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}\right|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2mk_0+l+\alpha}{2m}} e^{-c\left(\frac{|\mathbf{x}^*-\boldsymbol{\xi}|^{2m}}{|t-\tau|}\right)^{\frac{1}{q}}},$$
$$(t,\mathbf{x}),(\tau,\boldsymbol{\xi}),(t,\mathbf{x_0})\in Q\in Q,$$

Hier: $|\mathbf{x}^*-\xi| = \min\{|\mathbf{x}-\xi|, |\mathbf{x_0}-\boldsymbol{\xi}|\}$, $q=2m-1$.

Beweis:. *Ohne Beweis.*

expl:7.4 **Beispiel VII.4.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und $A=\Delta$. Dann gilt*

$$\left|\partial_t^{k_0}\nabla_{\mathbf{x}}^k G(t,\mathbf{x},\tau,\boldsymbol{\xi})\right| \leq C(t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2}-k_0} e^{-c\frac{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^2}{|t-\tau|}}, \quad (t,\mathbf{x}),(\tau,\boldsymbol{\xi})\in Q.$$

Beweis:. *ÜA*

thm:7.5 **Theorem VII.5** ([ÈdI70]). *Sei A gleichmäßig elliptisch und unabhängig von t. dann genügt die Greenfunktion G_λ von*

$$\begin{aligned}(\lambda - A)u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x}&\in\Omega,\\ u(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x}&\in\partial\Omega,\end{aligned}$$

der Abschätzung

$$\left|\nabla_{\mathbf{x}}^k G_\lambda(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\right| \leq C e^{-l_0(Re\lambda-B)^{\frac{1}{2m}}|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}\begin{cases}1 & \textit{falls } n+|k|<2m,\\ 1+|\log|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|| & \textit{falls } n+|k|=2m,\\ |\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^{n-|k|+2m} & \textit{falls } n+|k|>2m,\end{cases}$$

für $l_0, B > 0$ und $Re\lambda > B$.

Beweis:. *ohne Beweis*

VIII. Temperierte Distributionen

In diesem Abschnitt definieren wir die Fouriertransformation auf den temporierte Distributionen $S'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$.

VIII.1. Der Raum der schnell-fallenden Funktionen

Wir setzen

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\alpha,\beta} = sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\beta D^\alpha f(x)\right| < \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

S heißt *Raum der schnell-fallenden Funktionen*. Im Folgenden setzen wir

$$\|f\|_m = \sup_{\{|\alpha|\le m, |\alpha|\le m\}} \|f\|_{\alpha,\beta}\,.$$

dfn: 8.1 **Definition VIII.1.** $(f_j) \subset S(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen f in $S(\mathbb{R}^n)$ genau dann wenn $\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

rem: 8.2 **Bemerkung VIII.2.** *(a) S ist ein Fréchetraum.*

(b) $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$.

(c) $\mathbf{x} \mapsto e^{-|\mathbf{x}|^2} \in S(\mathbb{R}^n) \setminus D(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:. *ÜA*

Die Fouriertransformation ist auf S über

$$(\mathcal{F}u)(\boldsymbol{\xi}) := \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}>} u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},\ \boldsymbol{\xi}\ \in \mathbb{R}^n$$

definiert.

thm: 8.3 **Theorem VIII.3.** *(a) $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n))$.*

(b) $\widehat{(\nabla^\alpha u)}(\boldsymbol{\xi}) = (i\boldsymbol{\xi})^\alpha \hat{u}(\boldsymbol{\xi})$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

(c) $(\widehat{-(i\mathbf{x})^\alpha u})(\boldsymbol{\xi}) = (\nabla^\alpha \hat{u})(\boldsymbol{\xi})$.

(d) $\mathcal{F} : S \to S$ ist ein Isomorphismus und

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(\boldsymbol{\xi}) = \check{u}(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^n \widehat{u}(-\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n.$$

(e) *Für* $f, g \in S$ *gilt* $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(f) *Für* $f, g \in S$ *gilt* $\widehat{fg} = (\frac{1}{2\pi})^n \widehat{f} * \widehat{g}$.

(g) *Für* $f, g \in S$ *gilt* $\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g} = (\frac{1}{2\pi})^n \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\overline{\widehat{g}}$.

Beweis:. *siehe Funktionalanalysis, ÜA.*

VIII.2. Temperierte Distributionen

Wir definieren den Raum der temperierten Distributionen über $S'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(S, \mathbb{C})$.

thm: 8.4 **Theorem VIII.4.** *Sei* $T : S \to \mathbb{C}$ *linear. Dann sind äquivalent:*

(a) $T \in S'(\mathbb{R}^n)$

(b) *Es existiert* $m \in \mathbb{N}_0, C > 0$:

$$|< T, \varphi >| \leq C \left\|\varphi\right\|_m , \quad \varphi \in S.$$

Beweis:. $\Rightarrow$: *Annahme: Die Behauptung ist falsch. Dann existiert für alle* $m \in \mathbb{N}$ *ein* φ_m *mit* $\|\varphi_m\| \leq 1/m$ *und* $|< T, \varphi_m >| = 1$. *Es gilt* $\lim_{m\to\infty} \varphi_m = 0$ *in* $S(\mathbb{R}^n)$, *aber* $\lim_{m\to\infty} = |< T, \varphi_m >| = 1$. *Das ist ein Widerspruch zu (a).*
$\Leftarrow$: *klar (Betrachte Nullfolge).*

dfn: 8.5 **Definition VIII.5.** Seien $T_j, T \in S'(\mathbb{R}^n), j \in \mathbb{N}$. Wir sagen $\lim_{j\to\infty} T_j = T$ in S' wenn

$$\lim_{j\to\infty} < T_j, \varphi > = < T, \varphi >, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

thm: 8.6 **Theorem VIII.6.** *Sei* $p \in [1, \infty]$. *Dann gilt:*

$$D(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\hookrightarrow} S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$$

Beweis:. $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$: *klar*
$D(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\hookrightarrow} S(\mathbb{R}^n)$: *ÜA*
$S(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$: *Für* $p \in [1, \infty)$ *gilt*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|)^{n+1}} (f(\mathbf{x})(1 + |\mathbf{x}|)^{(n+1)/p})^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\leq \|f\|_{n+1}^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|)^{n+1}} dx, \leq C \left\|f\right\|_{n+1}^p , \quad f \in S.\end{aligned}$$

$p = \infty$ *klar.*
Weiter gilt $L^{p'}(\mathbb{R}^n) = (L^p(\mathbb{R}^n))' \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ *für* $p \in [1, \infty)$, *Der Fall* $p = \infty$ *lässt sich durch Nachrechnen zeigen.*
Wegen $D(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\hookrightarrow} S(\mathbb{R}^n)$ *folgt* $S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$.

pl:PropsS **Beispiel VIII.7.** *(a)* $\delta \in S'(\mathbb{R}^n)$.

(b) $x \mapsto e^x \in D'(\mathbb{R}^n) \setminus S'(\mathbb{R}^n)$.

(c) Sei $m \in \mathbb{N}_0$ *und* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ *mit* $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{x}|)^{-1} |f(x)| \, d\mathbf{x} < \infty$ *für ein* $k \in \mathbb{N}_0$. *Dann ist* $T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$, *wobei wir* $\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi$ *setzen.*

Beweis:. *ÜA.*

empDistri **Definition VIII.8.** (a) Seien $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, p Polynom. Wir definieren $D^\alpha T, pT, \psi T$ über

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha T, \varphi \rangle &:= (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle && , \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \\ \langle pT, \varphi \rangle &:= \langle T, p\varphi \rangle && , \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \\ \langle \psi T, \varphi \rangle &:= \langle T, \psi\varphi \rangle && , \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

Dann sind $D^\alpha T$, pT, $\psi T \in S'(\mathbb{R}^n)$.

(b) Sei $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren $\hat{T}$ (oder auch $\mathcal{F}T$) als

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

afoStetig **Theorem VIII.9.** *Die Fouriertransformation* $\mathcal{F}$ *ist ein (stetiger) Isomorphismus auf* $S'(\mathbb{R}^n)$. *Es gilt*

$$\langle \mathcal{F}^{-1} T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1} \varphi \rangle \quad T \in S'(\mathbb{R}^n), \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

und weiter $\mathcal{F}^{-1} T = (2\pi)^{-n} \; \mathcal{F}\tilde{T}$.

Beweis:. *Da* $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \mapsto S(\mathbb{R}^n)$ *und* $T : S(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ *stetig sind, ist auch* $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \mapsto S'(\mathbb{R}^n)$ *stetig, denn mit* $T_n \to T$ *in* $S'(\mathbb{R}^n)$ *gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \langle \hat{T}_n, \varphi \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle T_n, \hat{\varphi} = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{T}, \varphi \rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Also $\hat{T_n} \to \hat{T}$ *in* $S'(\mathbb{R}^n)$. *Sei* $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. *Dann folgt mit VIII.3*

$$\langle \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F} T, \mathcal{F}^{-1} \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

d.h. $\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} = Id_{S'(r^n)}$. *Analog gilt* $\mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} = Id_{S'(\mathbb{R}^n)}$. *Weiter gilt*

$$\langle \hat{\hat{T}}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\hat{\varphi}} \rangle = \langle T, (2\pi)^{-n} \tilde{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \tilde{T}, \varphi \rangle.$$

ribution **Theorem VIII.10.** *Sei* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Dann gilt*

$$\langle \hat{T}_f, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \langle \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} f(\boldsymbol{\xi}) e^{-\epsilon |\boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi}, \varphi \rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Beweis:. *Es gilt*

$$\langle \hat{T}_{fe^{-\epsilon|\cdot|}}, \varphi \rangle = \langle T_{fe^{-\epsilon|\cdot|}}, \hat{\varphi} \rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Mit Lebesgue folgt (Majorante ist $|f\hat{\varphi}| \in L^1(\mathbb{R}^n)$*):*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-\epsilon|\mathbf{x}|} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Damit folgt nun

$$\lim_{\epsilon \to 0} \langle \hat{T}_{fe^{-\epsilon|\cdot|}}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \langle T_{fe^{-\epsilon|\cdot|}}, \hat{\varphi} \rangle = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{T}_f, \varphi \rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

IX. Fundamentallösung und Fouriertransformation

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^n$ und ϕ eine zugehörige Fundamentallösung. Dann folgt mit VIII.3

$$1 = \hat{\delta} = \widehat{A\phi} = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\boldsymbol{\xi})^\alpha}_{:=\hat{A}} \hat{\phi},$$

d.h. formal "$\hat{\phi} = \hat{A}^{-1}$". Weiter gilt $Au = f$, da $\hat{u} = \widehat{\phi * f} = \hat{\phi} \cdot \hat{f} = \hat{A}^{-1} \hat{f}$.

eFourier **Beispiel IX.1.** *Sei $A = \Delta$. Dann gilt $\hat{A} = -|\boldsymbol{\xi}|^2$, d.h. $\hat{N}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \quad , \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Es lässt sich also folgende Vorgehensweise ableiten:

① Wende die Fouriertransformation auf die Gleichung an

② Löse Gleichung im Fourierbild

③ Anwenden der inversen Fouriertransformation liefert die Fundamentallösung.

neLeitung **Theorem IX.2.** *Die Fundamentallösung von*

$$\begin{aligned} \partial_t K(t, \mathbf{x}) - \Delta_{\mathbf{x}} K(t, \mathbf{x}) &= 0 \qquad &, t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ K(0) &= \delta \end{aligned}$$

ist $K(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}$, $t > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Beweis:. *Fouriertransformation in $\mathbf{x}$ liefert*

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{K}(t, \boldsymbol{\xi}) - |\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{K}(t, \boldsymbol{\xi}) &= 0 \qquad &, t > 0, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \\ \hat{K}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Nachrechnen zeigt $\hat{K}(t, \boldsymbol{\xi}) = e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2 t}$. $\partial_t \widehat{K(t, \mathbf{x})} = \partial_t \hat{K}(t, \boldsymbol{\xi})$ und die Rücktransformation ist ÜA.

Sei $\lambda \in \sum_\Theta$ für ein $\Theta \in (0, \pi), n \geq 3$. Wir betrachten nun

$$\lambda N_\lambda - \Delta N = \delta.$$

Die Fouriertransformation liefert

$$\lambda \hat{N}_\lambda - |\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{N}_\lambda = 1$$

Folglich gilt $\hat{N}_\lambda = \frac{1}{\lambda + |\boldsymbol{\xi}|^2} = \frac{1}{|\lambda| e^{i\arg(\lambda)} + |\boldsymbol{\xi}|^2} = \frac{1}{|\lambda|}\hat{N}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{\sqrt{|\lambda|}}\right)$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, wobei

$$\hat{N}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{\sqrt{|\lambda|}}\right) = \frac{1}{e^{i\arg(\lambda)} + \left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{\sqrt{|\lambda|}}\right)^2}.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{N}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right), \varphi\rangle &= \langle N\left(\frac{\cdot}{\sqrt{|\lambda|}}\right), \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle \\
&\overset{\text{ÜA.}}{=} (\sqrt{|\lambda|})^n \quad \langle N, \mathcal{F}^{-1}\varphi(\sqrt{|\lambda|}\cdot)\rangle \\
&\overset{\text{ÜA.}}{=} \langle N, \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi\left(\frac{\cdot}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right)\rangle \\
&= \langle \mathcal{F}^{-1}N, \varphi\left(\frac{\cdot}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\rangle \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \qquad \text{(IX.1)}
\end{aligned}$$

eq:Nwide-

Daher genügt es, $\mathcal{F}^{-1}N$ zu bestimmen.

etildeCauchyIntegral

Theorem IX.3. *Sei $n \geq 3$ und $\Theta \in (0, \pi)$. Dann existieren $C, c > 0$ mit*

$$|N_\lambda(\mathbf{x})| \leq C e^{-c_1\sqrt{|\lambda|}|\mathbf{x}|}\frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}} \quad , \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \Sigma_\Theta.$$

Beweis:. *Nach Theorem VIII.10 genügt es für $\epsilon > 0$ und $e^{i\theta}$, $|\theta| < \Theta$*

$$\check{N}^\epsilon(\mathbf{x}) = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle}}{e^{i\theta} + |\boldsymbol{\xi}|^2} e^{-\epsilon|\boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi}$$

zu berechnen und dann ϵ gegen 0 gehen zu lassen.
<u>Schritt 1:</u> Sei $R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine Rotation, d.h. $R^T = R^{-1}$ und $\det(R) = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\check{N}^\epsilon(R\mathbf{x}) &= (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle R\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle}}{e^{i\theta} + |\boldsymbol{\xi}|^2} e^{-\epsilon|\boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi} = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle \mathbf{x}, R^T\boldsymbol{\xi}\rangle}}{e^{i\theta} + |\boldsymbol{\xi}|^2} e^{-\epsilon|\boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi} \\
&\overset{\boldsymbol{\eta} = R^T\boldsymbol{\xi}}{=} (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}\rangle}}{e^{i\theta} + |R^{-T}\boldsymbol{\eta}|^2} e^{-\epsilon|R^{-T}\boldsymbol{\eta}|} d\boldsymbol{\eta} \\
&= (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}\rangle}}{e^{i\theta} + |\boldsymbol{\eta}|^2} e^{-\epsilon|\boldsymbol{\eta}|} d\boldsymbol{\eta} = \check{N}^\epsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Daher lässt sich o.B.d.A. $\mathbf{x} = (x_1, 0, ..., 0)$ *annehmen mit* $x_1 > 0$.
<u>*Schritt 2:*</u> *Kugelkoordinaten in* $(\xi_2, ..., \xi_n)$.

$$\begin{aligned}\check{N}^\epsilon(\mathbf{x}) &= c \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \frac{e^{ix_1\xi_1}}{e^{i\theta} + \xi_1^2 + r^2} e^{-\epsilon\sqrt{(\xi_1^2+r^2)}} r^{n-2} dr\ d\xi_1 \\ &\overset{\xi_1=(1+r)\eta}{=} c \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \frac{e^{ix_1(1+r)\eta}}{e^{i\theta} + ((1+r)\eta)^2 + r^2} e^{-\epsilon\sqrt{((1+r)\eta)^2+r^2}} \frac{r^{n-2}}{1+r} dr\ d\eta\end{aligned}$$

<u>*Schritt 3:*</u> *Cauchy-Integralsatz*
Es gilt:

① $z \mapsto e^{ix_1(1+r)z}$ *ist holomorph auf* $\mathbb{C}$ *und*

$$|e^{ix_1(1+r)z}| \leq e^{-x_1(1+r)\operatorname{Im}(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

② $z \mapsto e^{-\epsilon(1+r)\sqrt{\left[z^2+\frac{r^2}{(1+r)^2}\right]}}$ *ist holomorph auf* $\mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}\}$ *und*

$$|e^{-\epsilon(1+r)\sqrt{\left[z^2+\frac{r^2}{(1+r)^2}\right]}}| \leq C, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}\}.$$

Weiter ist $z \mapsto e^{-\epsilon(1+r)\sqrt{\left[z^2+\frac{r^2}{(1+r)^2}\right]}}$ *für* $r > 0$ *holomorph in einer Umgebung um* 0.

③ $e^{i\theta} + ((1+r)z)^2 + r^2 = 0 \iff z^2 = -\frac{e^{i\theta}+r^2}{(1+r)^2} \iff z_\pm(r) = \pm i\sqrt{\frac{e^{i\theta}+r^2}{(1+r)^2}}$. *Weiter gilt (ÜA)*

$$0 < C(\Theta) \leq \left|\frac{e^{i\theta}+r^2}{(1+r)^2}\right| \leq 1, \quad |\arg \frac{e^{i\theta}+r^2}{(1+r)^2}| \leq \Theta, \quad |\arg \sqrt{\frac{e^{i\theta}+r^2}{(1+r)^2}}| \leq \frac{\Theta}{2}$$

Insbesondere folgt also $\frac{\pi-\Theta}{2} \leq |\arg\ z_\pm(r)| \leq \frac{\pi+\Theta}{2}$ *und* $\sqrt{C(\Theta)} \leq |z_\pm(r)| \leq 1$. *Weiter gilt*

$$\left|\frac{1}{e^{i\theta}\,(1+r)z)^2 + r^2}\right| \leq \left|\frac{1}{(z-z_+(r))(z-z_-(r))}\right| \leq \frac{c}{|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| > 2.$$

Für $r > 0$ *setze*

$$\Gamma_r := \{z \in \mathbb{C} : z = t + i\kappa(\theta)|t|,\ t \in \mathbb{R}\}$$

mit $\kappa(\theta) > 0$ klein genug. Dann folgt mit dem Integralsatz von Cauchy, dass für $r > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix_1(1+r)\eta}}{e^{i\theta} + ((1+r)\eta)^2 + r^2} e^{-\epsilon\sqrt{((1+r)\eta)^2+r^2}} \frac{r^{n-2}}{1+r}\,\mathrm{d}\eta$$
$$= \int\limits_{\Gamma_r} \frac{e^{ix_1(1+r)z}}{e^{i\theta} + ((1+r)z)^2 + r^2} e^{-\epsilon\sqrt{((1+r)z)^2+r^2}} \frac{r^{n-2}}{1+r}\,\mathrm{d}z.$$

Der Satz von Lebesgue liefert nun

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma_r} \frac{e^{ix_1(1+r)z}}{e^{i\theta} + ((1+r)z)^2 + r^2} e^{-\epsilon\sqrt{((1+r)z)^2+r^2}} \frac{r^{n-2}}{1+r}\,\mathrm{d}z$$
$$= \int\limits_{\Gamma_r} \frac{e^{ix_1(1+r)z}}{e^{i\theta} + ((1+r)z)^2 + r^2} \frac{r^{n-2}}{1+r}\,\mathrm{d}z.$$

Eine weitere Anwendung des Integralsatzes von Cauchy liefert schließlich

$$\int\limits_{\gamma_r} \frac{e^{ix_1(1+r)z}}{e^{i\theta} + ((1+r)z)^2 + r^2} \frac{r^{n-2}}{1+r}\,\mathrm{d}z = \frac{e^{ix_1(1+r)z_-}}{z_+ - z_-} \frac{r^{n-2}}{1+r}$$

wobei γ_r einen geeigneten geschlossenen Weg um z_+ bezeichnet.
Schritt 4:

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0} \check{N}^\epsilon(\mathbf{x})\right| = c\int\limits_0^\infty e^{-cx_1(1+r)} r^{n-3}dr = ce^{-cx_1}\int\limits_0^\infty e^{-cx_1 r} r^{n-3}dr$$
$$\overset{s=x_1 r}{=} ce^{-cx_1}\int\limits_0^\infty e^{-cs} s^{n-3} x_1^{3-n}\frac{1}{x_1}ds$$
$$= \frac{e^{-cx_1}}{x_1^{n-2}}\int\limits_0^\infty e^{-cs}s^{n-3}ds \le c\frac{e^{-cx_1}}{x_1^{n-2}}.$$

Mit einer Gleichung wie (IX.1) *für N^ϵ folgt dann (ÜA)*

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0} N_\lambda^\epsilon(\mathbf{x})\right| \le \frac{c}{|\lambda|} e^{-c_1\sqrt{|\lambda|}|\mathbf{x}|} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}} \frac{1}{|\lambda|^{(n-2)/2}} \sqrt{|\lambda|}^n \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$
$$\le ce^{-c_1\sqrt{|\lambda|}|\mathbf{x}|}\frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}}.$$

X. Fouriermultiplikatoren

rierMult **Definition X.1.** Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ eine beschränkte, messbare Funktion. Dann gilt:

$$T_m f = \mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F} f \ \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

für $f \in S(\mathbb{R}^n)$. m heißt *Symbol*. Die Funktion m heißt *Fouriermultiplikator* falls

$$\|T_m f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

In diesem Fall kann T_m zu einem stetigen Operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden.

Wir betrachten $u - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $\hat{u} + |\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{u} = \hat{f}$, d.h. $\hat{u} = (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-1} \hat{f}$.
Frage: Ist $(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-1}$ ein Fouriermultiplikator?

s=Linfty **Theorem X.2.** *Sei $p = 2$. Dann ist $m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ ein Fouriermultiplikator genau dann, wenn $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis:. *Mit Plancharel folgt*

$$\begin{aligned}\|T_m f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\|\mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F} f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = c \|m \mathcal{F} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\mathcal{F} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in S(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

Falls umgekehrt $m \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dann existiert eine Folge messbarer Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ mit

- $0 \leq c_n \to \infty$ *für* $n \to \infty$
- $0 < |A_n| < \infty$
- $|m| \geq c_n$ *auf* A_n

Für $g_n := \chi_{A_n}$ gilt dann

$$\|T_m g_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |m(\boldsymbol{\xi}) g_n(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \geq c_n^2 |A_n| = c_n^2 \|g_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Insbesondere folgt aus dem Satz, dass $\boldsymbol{\xi} \mapsto \frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}$ ein Fouriermultiplikator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Der Fall $p \neq 2$ ist deutlich schwieriger.

ts.pneq2 **Theorem X.3.** *Sei $p \in (1, \infty)$ und $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{C}$ eine Funktion. Falls eine der Bedingungen* *(i)* $m \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *und* $|\boldsymbol{\xi}|^{|\beta|}|D^\beta m(\boldsymbol{\xi})| \leq c_m \quad , \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, |\beta| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ *(siehe [Mik57])*

(ii) $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *und* $|\boldsymbol{\xi}^\beta D^\beta m(\boldsymbol{\xi})| \leq c_m \quad , \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \beta \in \{0,1\}^n$ *(siehe [Liz63]).*

mit $c_n > 0$ *erfüllt, so ist* m *ein Fouriermultiplikator auf* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c(n,p)c_m$$

Beweis:. *Ohne Beweis.*

Mults.pneq2.keinOpti

Bemerkung X.4. *Für* $p \neq 2$ *sind keine optimalen Bedingungen bekannt.*

expl:homogen->mult

Beispiel X.5. *Sei* $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{C}$ *homogen vom Grad* $d \in \mathbb{N}_0$*, d.h.*

$$m(\zeta\boldsymbol{\xi}) = \zeta^d m(\boldsymbol{\xi}) \quad , \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \zeta > 0$$

Falls $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$*, so ist* $D^\beta m$ *homogen vom Grad* $k - |\beta|$ *für* $|\beta| \leq k$*. insbesondere erfüllt ein homogenes Symbol* $m \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *vom Grad* 0 *die Mikhilin-Bedingung. In diesem Fall ist*

$$c_m = \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}} \max_{|\boldsymbol{\eta}|=1} |D^\alpha m(\boldsymbol{\eta})|$$

Beweis:. *Für* $j = 1, \ldots, n$ *gilt*

$$|(\partial_j m)(\zeta\boldsymbol{\xi}) = \lim_{h \to 0} \zeta^d \frac{m(\boldsymbol{\xi} + \frac{h}{\zeta} e_j) - m(\boldsymbol{\xi})}{\zeta \frac{h}{\zeta}} = \zeta^{d-1}(\partial_j m)(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \zeta > 0.$$

Der Rest folgt mit Induktion. Insbesondere gilt für ein homogenes Symbol $m \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *vom Grad* 0*:*

$$|m(\boldsymbol{\xi})| = \left| m\left(|\boldsymbol{\xi}| \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \right) \right| = \left| m\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \right) \right| \leq \max_{|\boldsymbol{\eta}|=1} |m(\boldsymbol{\eta})| =: M < \infty, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\xi}|^{|\beta|}|D^\beta m(\boldsymbol{\xi})| &= |\boldsymbol{\xi}|^{|\beta|} \left| D^\beta m\left(|\boldsymbol{\xi}| \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \right) \right| = |\boldsymbol{\xi}|^{|\beta|} |\boldsymbol{\xi}|^{-|\beta|} \left| D^\beta m\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \right) \right| \\ &\leq \max_{|\boldsymbol{\eta}|=1} |D^\beta m(\boldsymbol{\eta})| =: M_\beta < \infty, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

tzungLoesungMikhilin

Theorem X.6. *Sei* $p \in (1, \infty)$ *und* $\lambda \in \sum_\Theta$ *für ein* $\Theta \in (0, \pi)$*. Dann genügt die Lösung von*

$$\lambda u - \Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n$$

der Abschätzung

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{|\lambda|^{\frac{2-k}{2}}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n), k = 0, 1, 2, \ |\alpha| = k.$$

Die Konstante $c > 0$ *ist unabhängig von* $\lambda \in \sum_\Theta$*.*

Beweis:. *Es gilt* $\hat{u}(\boldsymbol{\xi}) = m_\lambda(\boldsymbol{\xi})\hat{f}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ *wobei* $m_\lambda(\boldsymbol{\xi}) = (|\lambda| + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-1}$. *Zeige (ÜA): Die Mikhilin-Bedingung ist erfüllt.*

Bemerkung X.7.

(a) *Beachte* $\frac{\xi^\beta}{\lambda+|\xi|^2} \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *für* $|\beta| > 2$.

(b) *Sei* $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. *Dann gilt*

$$\xi^\beta \frac{1}{1+|\xi|^2}\hat{f} = \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}\xi^{\beta-\alpha}\hat{f}$$

für $|\alpha| \leq 2,\ \alpha \leq \beta$. *Mit Mikhlin ergibt sich*

$$||(1-\Delta)^{-1}f||_{W^{k+2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{k,p}||f||_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)}$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in (1,\infty)$.

XI. Operatortheorie

XI.1. Abgeschlossene Operatoren

Im Folgenden seien X, Y Banachräume.

Definition XI.1. (a) Eine lineare Abbildung

$$A : D(A) \to X \text{ mit } D(A) \subset X$$

heißt *linearer Operator*. $D(A)$ heißt *Definitionsbereich*. Ist A unbeschränkt, so heißt A unbeschränkter Operator.

(b) Ein Operator $A : D(A) \to X$ heißt *abgeschlossen*, falls für jede konvergente Folge $(x_n) \in D(A)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in X und $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ in X folgt, dass $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

Beispiel XI.2.

$$A \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow A \text{ abgeschlossen (ÜA).}$$

Definition XI.3. Sei $A : D(A) \to X$ ein Operator. Die *Graphennorm* ist definiert durch

$$||x||_A := ||Ax||_X + ||x||_X$$

für $x \in D(A)$. Der Graph von A ist gegeben durch

$$G(A) := \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in D(A) \text{ mit } (z, Az) = (x, y)\}.$$

Lemma XI.4. *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(a) A ist abgeschlossen.

(b) $(D(A), ||\cdot||_A)$ ist ein Banachraum.

(c) $G(A) \subset X \times X$ ist abgeschlossen.

Beweis:. *(ÜA)*

Definition XI.5. Sei $A : D(A) \to X$ ein Operator. Die Menge

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A) : D(A) \to X \text{ ist bijektiv und } (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\right\}$$

heißt *Resolventenmenge*. Die Abbildung $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} =: R(\lambda, A)$ heißt Resolvente von A. Die Menge $\sigma(A) := \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ heißt *Spektrum* von A.

Lemma XI.6. *Sei $A : D(A) \to X$ ein Operator. Dann gilt:*

(a) $\rho(A) \neq \emptyset \Rightarrow A$ *abgeschlossen.*

(b) A *abgeschlossen* $\Rightarrow \rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A) : D(A) \to X \text{ ist bijektiv}\}$.

(c) $\lambda \in \rho(A) \Rightarrow R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X, (D(A), ||\cdot||_A))$.

Beweis:. *(a)* $\lambda \in \rho(A), (x_n) \subset D(A)$ *mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *und* $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$. *Dann gilt für* $z_n := (\lambda - A)x_n$*:*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lambda x - y \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A)z_n = R(\lambda, A)(\lambda x - y) \in D(A).$$

Weiter gilt $(\lambda - A)x = (\lambda - A)R(\lambda, A)(\lambda x - y) = \lambda x - y \Rightarrow Ax = y$.

(b) $\lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $(\lambda - A) : D(A) \to X$ *bijektiv* $\Rightarrow (\lambda - A)^{-1}$ *ist abgeschlossen (ÜA). Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt, dass* $(\lambda - A)^{-1}$ *stetig ist.*

(c) (ÜA)

Bemerkung XI.7.

$$\begin{aligned} X &= C[0,1],\ A_i f = f',\ i = 1,2 \\ D(A_1) &= C^1[0,1] \\ D(A_2) &= \left\{f \in C^1[0,1] : f(1) = 0\right\} \\ \Rightarrow \sigma(A_1) &= \mathbb{C} \text{ und } \sigma(A_2) = \emptyset \end{aligned}$$

Definition XI.8. Sei $A : D(A) \to X$ ein Operator. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert* von A, falls es ein $0 \neq x \in D(A)$ mit $\lambda x = Ax$ gibt. Die Menge $\sigma_p = \{\lambda \in \sigma : \lambda \text{ ist Eigenwert}\}$ heißt *Punktspektrum*.

XI.2. Das Bochnerintegral

In diesem Abschnitt seien $f : I \to X$ und $f_n : I \to X$ stets Funktionen, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und X ein Banachraum.

Definition XI.9 (Einfache Funktionen)**.** (a) Eine Funktion $f : I \to X$ heißt *Stufenfunktion*, falls

$$f = \sum_{k=0}^{n} x_k \chi_{\Omega_k}$$

für messbare Mengen $\Omega_k \subset I$, $n \in \mathbb{N}$ mit $|\Omega_k| < \infty$ und $x_k \in X$ $(k = 0, \ldots, n)$.

(b) Eine Funktion $f : I \to X$ heißt messbar, falls sie punktweise durch Stufenfunktionen approximiert werden kann, d.h. $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t),\ t \in I$ f.ü..

(c) Eine Funktion $f : I \to X$ heißt *schwach messbar*, falls für alle $x' \in X'$ die Funktion $t \mapsto \langle f(t), x' \rangle$ messbar ist.

(d) Eine Funktion $f : I \to X$ heißt *separabelwertig*, falls es eine Nullmenge $\Omega_0 \subset I$ gibt mit

$$f(I \backslash \Omega_0) \text{ ist separabel in } X.$$

m:pettis **Theorem XI.10** (Pettis)**.** *Eine Funktion $f : I \to X$ ist genau dann messbar, wenn f schwach messbar und f fast separabelwertig ist.*

Beweis:. *(ÜA)*

Korollar XI.11.

(a) Sei $f : I \to X$ stetig. Dann ist f messbar.

(b) Sei X separabel. Dann ist f genau dann messbar, wenn f schwach messbar ist.

(c) Sei (f_n) messbar und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ f.ü. $\Rightarrow f$ ist messbar.

Beweis:. *(a) $t \mapsto \langle f(t), x' \rangle$ ist stetig für alle $x' \in X'$. Damit ist f schwach messbar. Da $\{f(t) : t \in I \cap \mathbb{Q}\}$ dicht in $f(I)$ ist, folgt die Behauptung mit Theorem XI.10.*

(b) klar (mit Theorem XI.10).

(c) $\langle f_n(t), x' \rangle \to \langle f(t), x' \rangle \forall x' \in X' \Rightarrow f$ ist schwach messbar. Sei Ω_n Nullmenge, so dass $f_n(I \backslash \Omega_n)$ separabel ist. Setze $\Omega_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, dann gilt:

- $|\Omega_0| = 0$
- $\Delta = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f_n(I \backslash \Omega_n)$ *ist separabel.*
- $\overline{\Delta}$ *ist separabel.*
- $f(I \backslash (\Omega_0 \cap \tilde{\Omega})) \subset \overline{\Delta}$ *wobei* $|\tilde{\Omega}| = 0$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$, $t \in I \backslash \tilde{\Omega}$.

Mit Theorem XI.10 folgt die Behauptung.

lfn:11.12 **Definition XI.12.** (a) Sei $f = \sum\limits_{i=1}^{n} X\ \chi_{\Omega_i}$ eine Stufenfunktion. Wir definieren

$$\int_I f(t)\, dt := \sum_{i=0}^{n} X_i\, |\Omega_i|$$

(b) eine Funktion f heißt *Bochner-integrierbar*, falls Stufenfunktionen f_n mit

- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t); \quad f.f.a\ t \in I$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \|f_n(t) - f(t)\|\, dt = 0$

existieren. In diesem Fall definieren wir

$$\int_I f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\, dt$$

rem:11.13 **Bemerkung XI.13.** *Das Bochnerintegral ist wohldefiniert.*

thm:11.14 **Theorem XI.14** (Theorem von Bochner)**.** *Eine Funktion f ist Bochner-integrierbar genau dann wenn f messbar und $\|f\|$ ist.*

Beweis:. *(ÜA).*

prp:11.15 **Proposition XI.15.** *(a) Sei $T \in L(X,Y)$ und $f : I \to X$ Bochner-integrierbar. Dann ist Tf Bochner integrierbar und*

$$T \int_I f(t)\, dt = \int_I Tf(t)\, \mathrm{dt}.$$

(b) Sei $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator und $f : I \to X$ Bochner-integrierbar. Weiter sei $f(t) \in D(A)$ f.f.a $t \in I$ und $Af : I \to X$ sei Bochner-integrierbar. Dann ist

$$\int_I f(t)\, dt \in D(A) und A \int_I f(t)\, dt = \int_I Af(t)\, \mathrm{dt}.$$

Beweis:. *(a) (ÜA)*

(b) Betrachte $(X \times X, \|(x,y)\| = \|x\| + |y|)$. Der Graph $G(A)$ von A ist ein abgeschlossener Unterraum von $X \times X$.
Setze

$$g : \begin{cases} I & \to G(A) \subset X \times X \\ t & \mapsto (f(t), Af(t)) \end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist g messbar und

$$\int_I \|g(t)\|\, dt = \int_I \|f(t)\|\, dt + \int_I \|Af(t)\|\, dt < \infty$$

d.h. g ist Bochner-integrierbar und

$$\int_I g(t)\, dt \in G(A)$$

Sei $\pi_i, i = 1,2$ über

$$\pi_i : \begin{cases} X \times X & \to X \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_i \end{cases}$$

definiert. Da $\pi_i, i = 1,2$ stetig sind, folgt mit (a)

$$\int_I \|g(t)\| \; dt = \left(\int_I \|f(t)\| \; dt, \int_I \|Af(t)\| \; dt \right) \in G(A),$$

d.h.

$$\int_I \|f(t)\| \; dt \in D(A) \text{ und } A \int_I \|f(t)\| \; dt = \int_I \|Af(t)\| \; \mathrm{dt}.$$

prp:11.16 **Proposition XI.16** (Dominierte Konvergenz)**.** *Seien (f_n) Bochner-integrierbare Funktionen und*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)\ ,\ f.f.a\ t \in I$$

Weiter sei $\|f_n(t)\| \le g(t)$ für eine integrierbare Funktion $g: I \to \mathbb{R}$. Dann gilt

(a) f ist Bochner-integrierbar.

(b) $\int_I \|f(t)\| \; dt = \lim_{n\to\infty} \int_I \|f(t)\| \; \mathrm{dt}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \int_I \|f(t) - f_n(t)\| \; dt = 0$.

Beweis:. *(ÜA).*

rem:11.17 **Bemerkung XI.17.** *Fubini gilt auch.*

XI.3. Vektorwertige holomorphe Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und X ein Banachraum. Dann heißt $f: \Omega \to X$ *holomorph*, falls

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \\ z_0+h\in\Omega}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \in X$$

für alle $z_0 \in \Omega$ existiert. f heißt *schwach holomorph* falls

$$\begin{cases} \Omega & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto < f(z), x' > \end{cases}$$

holomorph für alle $x' \in X'$ ist.

lma:11.18 **Lemma XI.18.** *(a) Sei $f: \Omega \to X$ schwach holomorph. Dann gilt für $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subset \Omega$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} \; \mathrm{d}z.$$

(Cauchy-Integralsatz)

(b) *Sei $f : \mathbb{C} \to X$ schwach holomorph und beschränkt. Dann gilt $f \equiv K$ für $K \in X$.*

Beweis:. (a) *Mit Proposition XI.15 folgt*

$$\begin{aligned}< f(z_0), x' > &\overset{CIS\ in\ \mathbb{C}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{< f(z), x' >}{z - z_0}\, dz \\ &=< \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, x' >, \quad x' \in X'\end{aligned}$$

Mit Hahn-Banach folgt $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$ und damit die Behauptung.

(b) *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Für $x' \in X'$ ist $g(z) =< f(z) - f(z_0), x' >$ beschränkt. Weiter gilt $g(z_0) = 0$. Also folgt mit Hahn-Banach und dem Satz von Liouville, dass $g(z) \equiv 0$ und$f(z) - f(z_0) \equiv 0$.*

lma:11.19 **Lemma XI.19.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to X$ eine Funktion. Dann sind äquivalent*

(a) *f ist holomorph*

(b) *f ist schwach holomorph*

(c) *Für alle $z_0 \in \Omega$ ex. $\epsilon > 0$ und $(a_n) \subset X$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, \epsilon)$$

Weiter gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

Beweis:. *(ÜA)*

XI.4. Resolvente und Spektrum

prp:11.20 **Proposition XI.20.** (a) *Sei $A : D(A) \to X$ ein Operator. Dann ist $\rho(A)$ offen und*

$$\begin{cases} \rho(A) & \to \mathscr{L}(x) \\ \lambda & \mapsto R(\lambda, A) \end{cases}$$

holomorph.

(b) *$\sigma(A)$ ist abgeschlossen.*

Beweis:. *Sei $\lambda_0 \in \rho(A)$. Dann gilt*

$$\lambda - A = \lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - A = Id - ((\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A))(\lambda_0 - A)$$

d.h. mit der Neumann'schen Reihe folgt $\lambda \in \rho(A)$ für $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, A)\|^{-1}$ und $R(\lambda, A) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} [(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda, A)]^n R(\lambda_0, A)$.

prp:11.21 **Proposition XI.21.** *Sei $A \in \mathscr{L}(x)$. Dann gilt*

- $\sigma(A) \neq \emptyset$
- $\sigma(A) \subset B(0, \|A\|)$

Beweis:. *(ÜA)*

Sei $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= R(\lambda, A)[Id - (\lambda - A)R(\mu, A)] \\ &= R(\lambda, A)[(\mu - A) - (\lambda - A)]R(\mu, A) \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) \end{aligned}$$

Diese Identität nennt man *Resolventenidentität.*

lma:11.22 **Lemma XI.22.** *Sei $A : D(A) \to X$ ein Operator und $\lambda_0 \in \rho(A)$. Dann gilt:*

(a) $\sigma(R(\lambda_0, A)) \setminus \{0\} = \left\{(\lambda_0 - \lambda)^{-1} : \ \lambda \in \sigma(A)\right\}$

(b) $\sigma_p(R(\lambda_0, A)) \setminus \{0\} = \left\{(\lambda_0 - \lambda)^{-1} : \ \lambda \in \sigma_p(A)\right\}$

Beweis:. *(a) Sei $\mu \in \rho(A)$ mit $\mu \neq \lambda_0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_0 - \mu} - R(\lambda_0, A) &= \frac{(\lambda_0 - A) - (\lambda_0 - \mu)}{\lambda_0 - \mu} R(\lambda_0, A) \\ &= \frac{\mu - A}{\lambda_0 - \mu} R(\lambda_0, A) \end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\frac{1}{\lambda_0 - \lambda} - R(\lambda_0, A)\right)^{-1} = (\lambda_0 - \mu)(\lambda_0 - A)R(\mu, A) \qquad \text{(XI.1)}$$ eq:lemma12.22

$\subseteq$: Sei nun $\nu \in \sigma(R(\lambda_0, A))$, $\nu \neq 0$.

<u>Annahme:</u> $\nu \notin (\lambda_0 - \sigma(A))^{-1}$

Wegen $\nu = \frac{1}{\lambda_0 - (\lambda_0 - \frac{1}{\nu})}$ *folgt dann* $\lambda_0 - \frac{1}{\nu} \in \rho(A)$. *und mit* (XI.1) *folgt* $\nu \in \rho(R(\lambda_0, A))$. *Widerspruch!*

$\supseteq$: *Sei* $\mu = (\lambda_0 - \lambda)^{-1}$ *und* $\lambda \in \sigma(A)$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\mu^2(\lambda - A) &= \mu^2(\lambda - \lambda_0 - \lambda_0 - A) \\ &= \mu^2(\lambda_0 - A)\left((\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A) + Id\right) \\ &= \mu(\lambda_0 - A)(\mu - R(\lambda_0, A))\end{aligned}$$

<u>Annahme:</u> $\mu \in \rho(R(\lambda_0, A))$

Es folgt unmittelbar ein Widerspruch.

(b) (ÜA)

XI.5. Adjungierte Operatoren und der Annihilator

In diesem Abschnitt sei X stets ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein *dicht definierter Operator*, d.h. $\overline{D(A)}^X = X$. Weiter bezeichne X' den Dualraum von X.

dfn:adjungierte

Definition XI.23.

$$D(A') := \{x' \in X' : \exists y' \in X' : \langle Ax, x'\rangle = \langle x, y'\rangle,\ x \in D(A)\}$$

und

$$A'x' := y' \text{ für } x' \in D(A').$$

A' heißt Adjungierte von A.

Im Folgenden untersuchen wir den Zusammenhang zwischen $Rg\,A$, $Kern\,A$, $Rg\,A'$ und $Kern\,A'$. Hierzu definieren wir für $M \subset X$:

$$M^\perp := \{x' \in X' : \langle x, x'\rangle = 0\ \forall x \in M\}.$$

$M^\perp$ heißt *Annihilator.*

thm:annihilator1

Theorem XI.24. *Sei* $M \subseteq X$ *und* X *reflexiv. Dann gilt:*

(a) $M^\perp$ *ist ein abgeschlossener Unterraum von* X'

(b) $(M^\perp)^\perp = \overline{span(M)}$

(c) $M \subset N \subset X \Rightarrow N^\perp \subset M^\perp$.

Beweis:.

(a) Sei $x', y' \in M^\perp$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Dann gilt:* $\langle x, x' + \lambda y'\rangle = \langle x, x'\rangle + \lambda\langle x, y'\rangle = 0$ *für* $x \in M$, *d.h.* $M^\perp$ *ist ein linearer Unterraum von* X'. *Weiter sei* $(x'_n) \subset M^\perp$ *und* $\lim_{n\to\infty} x'_n = x'$ *für ein* $x' \in X'$. *Dann gilt* $\langle x, x'\rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} x'_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, x'_n\rangle = 0$ *für* $x \in X$, *d.h.* $M^\perp$ *ist abgeschlossen.*

(b) *Sei $x \in M$. Wegen $\langle x', i_x \rangle = \langle x, x' \rangle = 0$ für $x' \in M^\perp$, folgt $M \subset (M^\perp)^\perp$. Wegen (a) gilt auch $\overline{span(M)} \subset (M^\perp)^\perp$. Sei nun $x_0 \notin \overline{span(M)}$. Dann existiert nach Hahn-Banach ein $x' \in X'$ mit $\langle x, x' \rangle = 0$, $x \in \overline{span(M)}$ aber $\langle x_0, x' \rangle \neq 0$. Damit folgt $x' \in M^\perp$ und $x_0 \notin (M^\perp)^\perp$.*

(c) *(ÜA).*

hilator2 **Theorem XI.25.** *Sei X reflexiv, $D(A')$ dicht in X'. Dann gilt*

$$(\mathrm{Ker}\, A)^\perp = \overline{(\mathrm{Rg}\, A')}$$
$$(\mathrm{Rg}\, A)^\perp = \mathrm{Ker}\, A'.$$

Beweis:. *Sei $y' \in Rg\, A'$. Dann folgt nach Definition*

$$0 = \langle Ax, x' \rangle = \langle x, A'x' \rangle = \langle x, y' \rangle, \quad x \in \mathrm{Ker}\ A,$$

d.h. $Rg\, A' \subset (Ker\, A)^\perp$. Sei nun $x \in (Rg\, A')^\perp$. Dann folgt

$$0 = \langle A'x', i_x \rangle = \langle x, A'x' \rangle = \langle Ax, x' \rangle, \quad x' \in D(A'),$$

d.h. $Ax = 0$ (beachte: $\overline{D(A')}^{X'} = X'$). Mit Theorem XI.24 folgt

$$\overline{Rg\, A'} = (Rg\, A')^{\perp\perp} \supset (Kern\, A)^\perp.$$

Insgesamt folgt $\overline{Rg\, A'} = (Kern\, A)^\perp$. Der Rest ist (ÜA).

Beispiel XI.26.

(a) *Sei $p \in (1, \infty)$, $\triangle_p : W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt nach ÜA $Kern\, \triangle_p = \{0\}$. Wegen $\triangle_p' = \triangle_{p'}$ (ÜA) folgt $\overline{\mathrm{Rg}\, \triangle_{p'}} = L^p(\mathbb{R}^n)$ aus Theorem XI.25.*

(b) *Wir wissen bereits, dass $(1 - \triangle_p)W^{2,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$, d.h. $(1 - \triangle_p)$ ist surjektiv für alle $p \in (1, \infty)$. Sein nun $u \in Kern\,(1 - \triangle_{p'})$. Mit partieller Integration folgt dann für $\varphi := (1 - \triangle_p)^{-1}\psi$*

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} ((1 - \triangle)u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} u(1 - \triangle)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} u\psi, \quad \psi \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

XII. Der Laplace-Operator in Gebieten

In diesem Abschnitt sei stets $p \in (1,\infty)$. Weiter sei $\triangle_{p,\mathbb{R}^n} : W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$. Wir sagen $\triangle_{p,\mathbb{R}^n}$ ist die *L^p-Realisierung des Laplace-Operators auf* $\mathbb{R}^n$. Wir wissen bereits, dass $\sigma(\triangle_{p,\mathbb{R}^n}) \subset (-\infty, 0]$ und

$$\|R(\lambda, \triangle_{p,\mathbb{R}^n})f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{|\lambda|}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ für } \lambda \in \Sigma_\theta,\ \theta \in (0,\pi)$$

gilt.

XII.1. Konsistenz

onsistenz

Definition XII.1. Es seinen $X_1,\ X_2$ Banachräume mit $X_j \hookrightarrow X$ für einen Hausdorffraum X. Weiter seien $A_j : D(A_j) \to X_j$ Operatoren mit $\lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2) \neq \emptyset$. $R(\lambda, A_1)$ und $R(\lambda, A_2)$ heißen *konsistent*, falls

$$R(\lambda, A_1)f = R(\lambda, A_2)f,\ f \in X_1 \cap X_2.$$

Vorsicht: Aus $R(\lambda, A_1)$ und $R(\lambda, A_2)$ konsistent für ein $\lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$ folgt im Allgemeinen nicht, dass $R(\lambda, A_1)$ und $R(\lambda, A_2)$ konsistent für alle $\lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$.

Beispiel XII.2. *$R(\lambda, \triangle_{p,\mathbb{R}^n})$, $\lambda \in \Sigma_\pi$ ist konsistent für $p \in (1,\infty)$, da die Darstellungsformel (entweder Fundamentallösung oder $(\lambda + |\xi|^2)^{-1}$) gleich ist. Daher schreiben wir im Folgenden $\triangle_{\mathbb{R}^n}$.*

XII.2. Der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n_+$

Wir definieren

$$\triangle_{p,\mathbb{R}^n_+} := \begin{cases} W^{2,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n_+) & \to L^p(\mathbb{R}^n_+) \\ u & \mapsto \triangle u \end{cases}$$

halbraum

Theorem XII.3. *Sei $\theta \in (0,\pi)$. Dann gilt $\Sigma_\theta \subset \rho(\triangle_{p,\mathbb{R}^n_+})$ und*

$$\|\nabla^k R(\lambda, \triangle_{p,\mathbb{R}^n_+})f\|_{L^p\mathbb{R}^n_+} \leq \frac{c}{|\lambda|^{1-\frac{k}{2}}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \text{ für } \lambda \in \Sigma_\theta,\ f \in L^p(\mathbb{R}^n_+) \text{ und } k = 0,1,2.$$

Weiter sind $R(\lambda, \triangle_{p,\mathbb{R}^n_+})$ für alle $p \in (1,\infty)$ und $\lambda \in \Sigma_\theta$ konsistent.

Beweis:. *(ÜA). Hinweis: Setze f geeignet auf $\mathbb{R}^n$ fort und nutze das entsprechende Resultat auf $\mathbb{R}^n$.*

XII.3. Der Laplaceoperator auf beschränkten Gebieten

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^2$. Wir definieren

$$\triangle_{p,\Omega} := \begin{cases} W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) & \to L^p(\Omega) \\ u & \mapsto \triangle u \end{cases}$$

thm:laplace_omega

Theorem XII.4. *Für $\theta \in (0, \pi)$ existiert $K \in \mathbb{R}$, so dass*

- $\Sigma_\theta + K \subset \rho(\triangle_{p,\Omega})$
- $\|R(\lambda, \triangle_{p,\Omega})f\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{c}{|\lambda - K|}\|f\|_{L^p(\Omega)}$ *für* $\lambda \in \Sigma_\theta$ *und* $f \in L^p(\Omega)$.

Die Operatoren $R(\lambda, \triangle_{p,\Omega})$ sind für $p \in (1, \infty)$ und $\lambda \in \Sigma_\theta + K$ konsistent.

Proof. Wir wollen mit Lokalisierungstechniken alles auf den Fall $\mathbb{R}^n_+$ zurückführen.
Schritt 1: Lokalisierung
Nach Voraussetzung existieren für $\varepsilon < \varepsilon_0$ und $x_0 \in \partial\Omega$ $\phi_{x_0,\varepsilon}$ und $\varphi_{x_0,\varepsilon}$ mit

- $\phi_{x_0,\varepsilon} \in C^2(B(x_0, \varepsilon))$
- $\phi^{-1}_{x_0,\varepsilon} \in C^2(\phi_{x_0,\varepsilon}B(x_0, \varepsilon))$
- $\phi_{x_0,\varepsilon}(x_0) = 0$
- $\nabla\varphi_{x_0,\varepsilon}(0) = 0$.

o.B.d.A. (ÜA) gilt dies auch für $x_0 \in \Omega$ (mit $\varphi_{x_0,\varepsilon} \equiv 0$, $\phi_{x_0,\varepsilon}(x_0) \neq 0$). Zu festem $\epsilon_0 > 0$ und beliebigem aber festem $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ wähle induktiv $x_1^\epsilon, ..., x_{N_\epsilon}^\epsilon, x_{N_\epsilon+1}^\epsilon, ..., x_{N_\epsilon+M_\epsilon}^\epsilon$ so dass

$$x_{j+1}^\epsilon \notin \bigcup_{i=1}^{j} B(x_i^\epsilon, \epsilon) \quad \text{für alle } j \text{ und} \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N_\epsilon} B(x_i^\epsilon, \epsilon) \quad \text{und} \quad \overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon} B(x_i^\epsilon, \epsilon)$$

beachte hierbei, dass $\partial\Omega$ kompakt ist nach Annahme.

Behauptung: Es gibt eine Konstante $K(n)$, die nur von der Raumdimension abhängt so dass für alle $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ und alle $x \in \Omega$ gilt

$$\#\{i \in \{1, ..., N_\epsilon + M_\epsilon\} \mid x \in B(x_i^\epsilon, \epsilon)\} \leq K(n)$$

Beweis: Sei $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ und $i_0 \in \{1, ..., N_\epsilon + M_\epsilon\}$. Dann gilt wegen $|x_{i_0}^\epsilon - x_i^\epsilon| \geq \epsilon$ für $i \neq i_0$ dass

$$B\left(x_{i_0}^\epsilon, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap B\left(x_i^\epsilon, \frac{\epsilon}{2}\right) = \emptyset$$

Weiter gilt für alle i mit $B(x_{i_0}^\epsilon, \epsilon) \cap B(x_I^\epsilon, \epsilon) \neq \emptyset$ dass $|x_{i_0}^\epsilon - x_i^\epsilon| \leq 2\epsilon$, d.h.

$$B(x_i^\epsilon, \epsilon) \subset B(x_{i_0}^\epsilon, 4\epsilon)$$

Insbesondere gilt

$$\#\{i \neq i_0 \mid B(x_i^\epsilon, \epsilon) \cap B(x_{i_0}^\epsilon, \epsilon) \neq \emptyset\} \leq \frac{|B(x_{i_0}^\epsilon, 4\epsilon)|}{|B(x_{i_0}^\epsilon, \frac{\epsilon}{2})|} =: K(n)$$

Wähle nun zu $(B(x_i^\epsilon, \epsilon))_{i=1,...,N_\epsilon+M_\epsilon}$ eine Zerlegung der Eins, $(\psi_{i,\epsilon})_{i=1,...,N_\epsilon+M_\epsilon}$. Wir schreiben auch $\Phi_{i,\epsilon} := \Phi_{x_i,\epsilon}$ und $\Omega_{i,\epsilon} = \Omega_{x_i,\epsilon}$.
Schritt 2: Konstruktion der Resolvente. Für $\lambda \in \sum_\Theta$ setzen wir

$$\hat{f}_i^\epsilon(\hat{x}) := \begin{cases} f(\Phi_{i,\epsilon}^{-1}(\hat{x})), & \hat{x} \in \Phi_{i,\epsilon}(\Omega_{i,\epsilon}) =: \widehat{\Omega}_{i,\epsilon} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

[Notation: $\hat{\cdot}$ heißt: $\cdot$ lebt auf dem Halbraum im transformierten Problem]. Auf dem Halbraum lösen wir mit Satz XII.3 und erhalten:

$$\hat{u}_i^\epsilon := R(\lambda, \Delta_{\mathbb{R}_+^n})\hat{f}_i^\epsilon$$

Wir definieren nun

$$U_i^\epsilon(x) := (T_{i,\epsilon}\hat{u}_i^\epsilon)(x) := \hat{u}_{i,\epsilon}(\Phi_{i,\epsilon}(x)), \quad x \in \Omega_{i,\epsilon}$$

und $R_\lambda^\epsilon(x) := \sum_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon} \psi_{i,\epsilon} \cdot u_i^\epsilon$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\lambda - \Delta)R_\lambda^\epsilon f &= (\lambda - \Delta) \sum_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon} \psi_{i,\epsilon}u_i^\epsilon \\ &= \sum_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon} \psi_{i,\epsilon}(\lambda - \Delta)u_i^\epsilon + [\psi_{i,\epsilon}, \Delta]u_i^\epsilon. \end{aligned} \tag{XII.1}$$

eq:tmpInProof

Hierbei: $[X, Y] = XY - YX$, also

$$\begin{aligned}[\psi_{i,\epsilon}, \Delta]f &= \psi_{i,\epsilon}(\Delta f) - \Delta(\psi_{i,\epsilon}f) \\ &= \cancel{\psi_{i,\epsilon}(\Delta f)} - (\Delta\psi_{i,\epsilon})f - 2(\nabla\psi_{i,\epsilon}|\nabla f) - \cancel{\psi_{i,\epsilon}(\Delta f)} \\ &= -(\Delta\psi_{i,\epsilon})f - 2(\nabla\psi_{i,\epsilon}|\nabla f).\end{aligned}$$

Setzen wir also (XII.1) fort:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon} \psi_{i,\epsilon}\Big(T_{i,\epsilon}\underbrace{((\lambda-\Delta)\hat{u}_i^\epsilon)}_{=\hat{f}_j^\epsilon}\Big) + \psi_{i,\varepsilon}[T_{i,\epsilon},\Delta]\hat{u}_i^\epsilon + [\psi_{i,\epsilon},\Delta]u_i^\epsilon \\
=& \underbrace{\sum_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon} \psi_{i,\epsilon}T_{i,\epsilon}\hat{f}_i^\epsilon}_{:=f} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon} \psi_{i,\varepsilon}[T_{i,\epsilon},\Delta]\hat{u}_i^\epsilon + [\psi_{i,\epsilon},\Delta]u_i^\epsilon}_{:=-S_\lambda f} \qquad =: (Id - S_\lambda)f
\end{aligned}$$

Idee ist jetzt: zeige $\|S_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^p(\Omega))} < 1$ für ϵ klein und λ groß genug. Dann folgt mit der Neumannsche Reihe

$$R(\lambda,\Delta_\Omega) = R_\lambda^\epsilon \cdot \sum_{n=0}^\infty S_\lambda^n$$

da

$$\left((\lambda-\Delta)R_\lambda^\epsilon \sum_{n=0}^\infty S_\lambda^n\right) f = \Big((Id-S_\lambda)\cdot \sum_{n=0}^\infty S_\lambda^n\Big) f = \Big((Id-S_\lambda)\cdot(Id-S_\lambda)^{-1}\Big) f = f$$

<u>Schritt 3:</u> $\|S_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^p(\Omega))} < 1$ für ϵ klein und λ groß genug. Es gilt:

$$[T_{i,\epsilon},\Delta]u_i^\epsilon = \Delta\hat{u}_i^\epsilon(\Phi_{i,\epsilon}(x)) - \Delta(\hat{u}_i^\epsilon\circ\Phi_{i,\epsilon})(x)$$

<u>Nebenrechnung:</u> Wir schreiben hier abkürzend $\partial_k\Phi_{i,\epsilon}(x)\in\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektor. Damit gilt:

$$\partial_k(\hat{u}_i^\epsilon\circ\Phi_{i,\epsilon})(x) = (\partial_k\hat{u}_i^\epsilon)(\Phi_{i,\epsilon}(x))\cdot\partial_k\Phi_{i,\epsilon}(x)$$

$$\partial_k^2(\hat{u}_i^\epsilon\circ\Phi_{i,\epsilon})(x) = \nabla\hat{u}_j^\epsilon(\Phi_{i,\epsilon}(x))\cdot\partial_k^2\Phi_{i,\epsilon}(x) + \partial_k(\Phi_{i,\epsilon}(x))^T(\nabla^2\hat{u}_j^\epsilon)\partial_k(\Phi_{i,\epsilon}(x))$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\nabla\Phi_{i,\epsilon}(x) = \left[Id + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ \nabla'\phi_{i,\epsilon}(x') & 0\end{pmatrix}\right]R_{i,\epsilon}$$

wobei $R_{i,\epsilon}$ eine Rotation in $\mathbb{R}^n$ ist, $\nabla'\phi = (\partial_1\phi_{i,\epsilon},...,\partial_{n-1}\phi_{i,\epsilon})$, $x' = (x_1,...,x_{n-1})$ und $\|\nabla'\phi_{i,\epsilon}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}$ klein, falls ϵ klein genug. Wegen $R_{i,\varepsilon}^T = R_{i,\varepsilon}^{-1}$ gilt

$$\sum_{j,k,j=1}^n (R_{i,\varepsilon})_{kj}\,\partial_j\partial_l\hat{u}_j^\epsilon(\Phi_{i,\epsilon}(x))\,(R_{i,\varepsilon})_{lj} = \Delta\hat{u}_j^\epsilon(\Phi_{i,\epsilon}(x)).$$

Daher erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon} \left\|[T_{i,\epsilon},\Delta]u_j^\epsilon\right\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_{i,\epsilon})}\\
&\leq \sum_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon} \|\nabla \hat{u}_i^\epsilon\|_{\mathrm{L}^p(\widehat{\Omega}_{i,\epsilon})}\cdot\left\|\nabla^2\phi_{i,\epsilon}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon} \left\|\nabla^2\hat{u}_j^\epsilon\right\|_{\mathrm{L}^p(\widehat{\Omega}_{i,\epsilon})}\cdot\left\|\nabla'\phi_{i,\epsilon}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}\\
&=: S_\lambda^1 f + S_\lambda^2 f.
\end{aligned}
$$

Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon} \|[\psi_{i,\epsilon},\Delta]\hat{u}_i^\epsilon\|_{\mathrm{L}^p(\widehat{\Omega}_{i,\epsilon})} &\leq \sum_{i=1}^{N_\epsilon+M_\epsilon}\Big(\left\|\nabla^2\psi_{i,\epsilon}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\nabla\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}\Big)\cdot\|u_j^\epsilon\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega_{i,\epsilon})}\\
&=: S_\lambda^3 f
\end{aligned}
$$

Wähle nun (ÜA)

(1) $\epsilon > 0$ klein so dass $S_\lambda^2 f \leq 1/4\|f\|_{L^p(\Omega)}$, $f \in L^p(\Omega)$.

(2) λ_0 so groß, dass $S_\lambda^1 f + S_\lambda^3 f \leq 1/4\|f\|_{L^p(\Omega)}$, $\lambda \in \Sigma_{\lambda_0,\theta}$, $f \in L^p(\Omega)$.

Schritt 4: Wir wissen also bereits, dass eine Linksinverse existiert. Die Existenz einer Rechtsinversen folgt nun wie in Kapitel XI, Abschnitt 5 (Lösbarkeit für die Adjungierte impliziert Eindeutigkeit).
Schritt 5: Nach Konstruktion folgt die Konsistenz und die Normabschätzung für die Resolvente für λ ausreichend groß. □

`nGebieten` **Bemerkung XII.5.** *Obiges Resultat lässt sich auf unbeschränkte Gebiete mit „gleichmäßigem“ C^2-Rand fortsetzen (vgl. [Ada75, Abschnitt 4.6] für die Definition von „gleichmäßig“).*

XIII. Funktionalkalkül

XIII.1. Dunford-Funktionalkalkül

In diesem Abschnitt sei A stets ein beschränkter linearer Operator und X ein Banachraum.

`nfordDef` **Definition XIII.1.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\sigma(A) \subset\subset \Omega$ und

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \mapsto \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

Wir definieren dann für $h \in H(\Omega)$:

$$h^b(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma h(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda$$

wobei Γ ein Weg ist der komplett in Ω enthalten ist und das Spektrum $\sigma(A)$ einmal gegen den Uhrzeigersinn umläuft.

`roperties` **Theorem XIII.2.** *Es gilt*

`rties:fg` *(a)* $f^b(A) g^b(A) = (f^b g^b)(A), f, g \in H(\Omega)$.

`monomial` *(b)* $(\lambda^k)^b = A^k, k \in \mathbb{N}_0$.

`schraenkt` *(c)* $\|f^b(A)\| \leq C_{A,\Gamma} \|f\|_{L^\infty(\Gamma)}$.

`esolvente` *(d)* $\left((\lambda_0 - \cdot)^{-1}\right)^b (A) = R(\lambda_0, A)$.

Insbesondere ist

$$\Phi_a : \begin{cases} H^\infty(\Omega) \mapsto \mathcal{L}(X) \\ f \mapsto f^b(A) \end{cases}$$

ein beschränkter Algebrenhomomorphismus.

Beweis:. *(a) Es gilt für alle $f, g \in H(\Omega)$ (Cauchy):*

$$\begin{aligned}
f^b(A)g^b(A) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_f}\int_{\Gamma_g} f(\lambda)g(\mu)R(\lambda,A)R(\mu,A)d\mu d\lambda \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_f}\int_{\Gamma_g} f(\lambda)g(\mu)[R(\lambda,A)-R(\mu,A)](\mu-\lambda)^{-1}d\mu d\lambda \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left[\int_{\Gamma_f}\underbrace{\int_{\Gamma_g}\frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu}_{=2\pi i g(\lambda)}\ f(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda + \int_{\Gamma_f}\int_{\Gamma_g}\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}d\mu\ g(\mu)R(\mu,A)d\mu\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_f} g(\lambda)f(\lambda)R(\lambda,A) = (gf)^b(A).
\end{aligned}$$

(d) Sei $f_{\lambda_0} = (\lambda_0-\lambda)^{-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f^b_{\lambda_0}(A) =& \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_{\lambda_0}(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda \\
=& \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r^+} f_{\lambda_0}(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r^-} f_{\lambda_0}(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda}_{=0\,(Cauchy)} \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} f_{\lambda_0}(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda \\
=& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r^+}\frac{R(\lambda,A)}{\lambda-\lambda_0}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{R(\lambda,A)}{\lambda-\lambda_0}\,\mathrm{d}\lambda \\
=& R(\lambda_0,A) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{R(\lambda,A)}{\lambda-\lambda_0}\,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

Wegen $|\Gamma_r| \sim r$ und $\|(\lambda-\lambda_0)^{-1}R(\lambda,A)\| \sim r^{-2}$ für $r > 0$ groß genug folgt nun

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{R(\lambda,A)}{\lambda-\lambda_0}\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

und damit die Behauptung.
(c) Klar.
(b) $k = 0$: Mit

$$R(\lambda,A) = (\lambda-\lambda_0)\frac{R(\lambda,A)}{\lambda-\lambda_0} = \frac{Id}{\lambda-\lambda_0} + \frac{AR(\lambda,A)}{\lambda-\lambda_0} + \frac{\lambda_0 R(\lambda,A)}{\lambda-\lambda_0} =: f_1 + f_2 + f_3,$$

(d) und dem Satz von Cauchy folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda,A)d\lambda &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_1(\lambda)+f_2(\lambda)+f_3(\lambda)d\lambda \\
&= 0 + AR(\lambda_0,A) + \lambda_0 R(\lambda_0,A) \\
&= Id.
\end{aligned}$$

Rest ist ÜA.

lBeispiel **Beispiel XIII.3.** *Sei* $Ax := \left(-\frac{1}{n}x_n\right), x \in X =: \ell^2(\mathbb{N})$. *Dann gilt*

(a) $A \in \mathcal{L}(X), \sigma(A) = \left\{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

(b) Für $f \in H(\Omega)$ *mit* $\sigma(A) \subset\subset \Omega$ *gilt*

$$f^b(A) = \begin{cases} \ell^2 \mapsto \ell^2 \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(f\left(-\frac{1}{n}\right)x_n\right) \end{cases}$$

Beweis:. *ÜA.*

XIII.2. Sektorielle Operatoren

rielleOps **Definition XIII.4.** (a) A heißt *sektoriell*, falls es $k \in \mathbb{R}, \vartheta \in (0,\pi)$ gibt so dass $\varrho(A) \supset \sum_{k,\vartheta} := \sum_\vartheta + k$, $\overline{D(A)} = \overline{\mathrm{Rg}(k-A)} = X$, $\ker(k-A) = \{0\}$ und außerdem

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{|\lambda - k|} \quad \text{für alle } \lambda \in \textstyle\sum_{k,\vartheta}.$$

In diesem Fall schreiben wir $A \in S(\Theta_S, k)$ mit $\Theta_S := \sup \vartheta$. Θ_S heißt *Sektorialitätswinkel*.

(b) Sei $\Theta \in (0,\pi)$ und $k \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\mathcal{H}_a((\textstyle\sum_{k,\Theta})^c) := \{f \in \mathcal{H}_{0,\beta} \mid f \text{ holomorph in einer Umgebung von } k\}$$

wobei

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}((\Sigma_{k,\Theta})^c) := \{f \in \mathcal{H}((\textstyle\sum_{k,\Theta})^c) \mid |f|^{\Theta,k}_{\alpha,\beta} < \infty\}$$

und

$$|f|^{\Theta,k}_{\alpha,\beta} := \sup_{\substack{|\lambda-k|\leq 1 \\ \lambda\in(\sum_{k,\Theta})^c}} |\lambda^\alpha f(\lambda)| + \sup_{\substack{|\lambda|\geq 2k \\ \lambda\in(\sum_{k,\Theta})^c}} |\lambda^{-\beta} f(\lambda)|$$

Von nun an setzen wir $k = 0$ und $A : D(A) \mapsto X$ sei ein sektorieller Operator. Wähle $\Theta < \theta < \Theta_S$. Für einen sektoriellen Operator definieren wir

$$f^a(A) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\epsilon} f(\lambda)R(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda, \quad f \in \mathcal{H}_a((\overline{\textstyle\sum_{0,\Theta}})^c),$$

wobei

$$\Gamma_\varepsilon := \{r\mathrm{e}^{\pm i\theta}, r \geq \varepsilon\} \cup \{\varepsilon \mathrm{e}^{i\varphi} : \varphi \in (-\theta, \theta)\}.$$

Hierbei ist $\varepsilon > 0$ so klein, dass f holomorph in $B(0,\varepsilon)$ ist. Insbesondere läuft Γ_ε im Holomorphiegebiet von f und der Resolvente von A.

rsteBmrkZuSektoriell **Bemerkung XIII.5.** *(a) Γ_ϵ muss in Abhängigkeit von f gewählt werden.*

(b) $f^a(A)$ ist wohldefiniert nach Cauchy.

secDunfordProperties **Theorem XIII.6.** *(a) Sei $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt*

$$f^a(A) = f^b(A)\ , \quad f \in \mathcal{H}_a(\overline{\sum_{0,\Theta}^c}\cdot)$$

(b) $f^a(A)g^a(A) = (fg)^a(A)\ , \quad f,g \in \mathcal{H}_a(\overline{\sum_{0,\Theta}^c})$.

roperties:resolvente *(c) $((\lambda_0 - \cdot)^{-1})^a(A) = R(\lambda_0, A)$, $\lambda_0 \in \sum_{0,\Theta-\epsilon}$.*

(d) $\|f^a(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_{A,\Gamma_\varepsilon} \cdot (|f|_{0,\beta}^{0,\Theta} + |f|_{L^\infty(\Gamma_\varepsilon)})$, $f \in \mathcal{H}_{0,\beta}(\overline{\sum_{0,\Theta}^c})$.

Beweis:. *Nur (c), Rest ist ÜA. Es gilt*

$$\begin{aligned}
\left((\lambda_0 - \cdot)^{-1}\right)^a(A) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\epsilon} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda, A) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{\Gamma_\epsilon \\ |\lambda|<R}} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda, A) d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda, A) d\lambda \\
&\quad \underbrace{- \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda, A) d\lambda}_{\overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{\Gamma_\epsilon \\ |\lambda|>R}} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda, A) d\lambda}_{\overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0} \\
&\overset{Cauchy}{=} R(\lambda_0, A).
\end{aligned}$$

thm:ableitungsRegel **Theorem XIII.7.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mu \mapsto f(\mu, \cdot) \in \mathcal{H}_a(\overline{\sum_{0,\Theta}^c})$ holomorph für $\mu \in \Omega$ mit*

(a) Für alle $\mu_0 \in \Omega$ existiert $\epsilon > 0, \delta > 0$: $B(\mu_0, \epsilon) \subset \Omega$ und $f(\mu, \cdot)$ ist holomorph in $B(0, \delta)$ für $z \in B(\mu_0, \epsilon)$

(b) Für alle $\mu_0 \in \Omega$ existiert $g \in L^\infty(\Sigma_{0,\Theta}^c \cap B(0, \delta))$ mit $|g|_{0,\beta}^{0,\Theta} < \infty$ und $\epsilon > 0$:

$$|f(\mu, z)| \leq |g(z)|, \quad \mu \in B(\mu_0, \epsilon).$$

Dann gilt $\mu \mapsto f(\mu, A)$ ist holomorph für $\mu \in \Omega$ und

$$\left(\left(\frac{d}{d\mu} f\right)(\mu, \cdot)\right)(A) = \frac{d}{d\mu}\left(f(\mu, A)\right)$$

Beweis:. *Nach Voraussetzung ist* $f(\mu, A)$ *wohldefiniert für alle* $\mu \in \Omega$. *Weiter gilt für* $\mu_0 \in \Omega$ *und* $h \in \mathbb{C}$ *mit* $\mu_0 + h \in \Omega$

$$\begin{aligned}\frac{f(\mu_0 + h, A) - f(\mu_0, A)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{\Gamma_\epsilon} f(\mu_0 + h, \lambda) R(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda\right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{h}\int_{\Gamma_\epsilon} f(\mu_0, \lambda) R(\lambda, A) d\lambda\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\mu_0 + h, \lambda) - f(\mu_0, \lambda)}{h} R(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung und dem Satz von Cauchy gilt für $\varepsilon, \delta > 0$ *klein genug*

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{d\mu}(f(\mu, \lambda))\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{B(\mu,\delta)} \frac{f(z, \lambda)}{(z - \mu)} d\mu\right| \leq C(\delta) \sup_{z \in B(\mu,\delta)} |f(\mu, \lambda)| \\ &\leq C(\delta)|g(\lambda)|, \quad \mu \in B(\mu_0, \varepsilon).\end{aligned}$$

Der Satz von Lebesgue liefert nun:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ \mu + h \in \Omega}} \frac{f(\mu + h, A) - f(\mu, A)}{h} &= \int_{\Gamma_\epsilon} \lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ \mu + h \in \Omega}} \frac{f(\mu + h, \lambda) - f(\mu, \lambda)}{h} R(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{d}{d\mu} f(\mu, \lambda) R(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

XIII.3. MISSING:Hol. Halbgruppen

XIII.4. MISSING:Gebr. Potenzen

XIII.5. MISSING:ACP

thm:13.18 **Theorem XIII.8.** *Sei entweder*

(a) $f \in C\left(\overline{\mathbb{R}_+}, X\right)$ *mit* $f(s) \in D\left((-A)^\alpha\right)$ *für ein* $\alpha \in (0, 1]$ *und* $\|(-A)^\alpha f\|_{L^\infty_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+}, X)} < \infty$
oder

(b) $f \in C^\nu([0, T], X)$ *für ein* $\nu \in (0, 1)$.

Dann ist die milde Lösung eine klassische Lösung.

Beweis: (nur Idee)**.** *(a): Für alle* $T_0 > 0$ *existiert* $C_{T_0} > 0$

$$\begin{aligned}\left\|A e^{(t-s)A} f(s)\right\|_X &= \left\|(-A)^{1-\alpha} e^{(t-s)A} (-A)^\alpha f(s)\right\|_X \\ &\overset{(\text{ÜA})}{\leq} C_{T_0} (t - s)^{\alpha - 1}, \quad 0 < s < t < T_0.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$s \mapsto Ae^{(t-s)A} f(s) \in L^1([0,t], X)$$

Proposition (XI.15)*(b) liefert nun*

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds \in D(A).$$

Weiter ist $Au \in C\left(\overline{\mathbb{R}_+}, X\right)$ *und es gilt (ohne Beweis)*

$$u'(t) = f(t) + A \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds,$$

d.h. $u' \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$.
(b) ohne Beweis.

rem:13.19 **Bemerkung XIII.9.** *Beachte:* $\left\|A\mathrm{e}^{tA}\right\|_X \sim \frac{1}{t}$ *ist typisch für analytische Halbgruppen. Daher gilt i.A. nicht*

$$u(t) = \int\limits_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} f(s)\, \mathrm{d}s \in D(A)$$

für $f \in L^p(\mathbb{R}_+, X)$.

XIII.6. Semilineare Probleme

Sei $A : D(A) \to X$ ein sektorieller Operator mit $k = 0$ und $0 \in \rho(A)$. Wir betrachten:

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) &= f(t, u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{XIII.1}$$ eq:sem1

In diesem Abschnitt wollen wir stets

$$f : U \to X$$

mit

- $(X_\alpha, \|.\|) = \left(D(-A)^\alpha, \|.\|_{D((-A)^\alpha)}\right)$, dabei ist $\|(-A)^\alpha x\| \cong \|(-A)^\alpha x\| + \|x\|$
- $U \subset \overline{\mathbb{R}_+} \times X_\alpha$
- $\forall (t,x) \in U : \exists$ eine Umgebung $W \subset U, L \geq 0, \nu \in [0,1]$:

$$\|f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)\| \leq L\left(|t_1 - t_2|^\nu + \|x_1 - x_2\|_\alpha\right), \quad (t_i, x_i) \in W \tag{XIII.2}$$ eq:sem2

- $\alpha \in (0,1)$

voraussetzen.

thm:13.20 **Theorem XIII.10.** *Sei* $(0, u_0) \in U$. *Dann besitzt* (XIII.1) *eine eindeutge, lokale, milde Lösung.*

$$u \in C([0,T], X) \cap C^1((0,T), X)$$

für ein $T := T(u_0) > 0$.

Beweis:. *Schritt1:* *Banachscher Fixpunktsatz*
Sei $T_0 > 0$. *Es gilt* $\left\|(-A)^\alpha e^{tA}\right\| \leq C_\alpha t^{-\alpha}\ t \in (0, T_0)$
Wähle $t' > 0$, $\rho > 0$ *sodass* (XIII.2) *mit* L, ρ *in*

$$V := \left\{(t,u) \in U : 0 \leq t \leq t', \|u - u_0\|_\alpha \leq \delta\right\}$$

gilt. Setze

$$B := \max_{0 \leq t \leq t'} \|f(t, u_0)\|$$

und wähle t_1 *mit*

$$\left\|e^{tA}(-A)^\alpha u_0 - (-A)^\alpha u_0\right\| \leq \frac{\delta}{2}, \quad 0 \leq t < t_1,$$

und

$$0 < t_1 < \min\left\{t', \left[\frac{\delta}{2}(1-\alpha) C_\alpha^{-1} (B + \delta L)^{-1}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}.$$

Weiter bezeichne Y *den Banachraum* $C([0, t_1], X)$. *Wir betrachten*

$$Fy(t) = e^{tA}(-A)^\alpha u_0 + \int_0^t (-A)^\alpha e^{(t-s)A} f(s) (-A)^{-\alpha} y(s)\, ds.$$

Dann gilt

- $F : Y \to Y$
- $Fy(0) = (-A)^\alpha u_0$

Sei nun $S := \{y \in Y : \|y(t) - (-A)^\alpha u_0\| < \delta\} \subset Y$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\|Fy(t) - (-A)^\alpha u_0\| \leq & \left\|e^{tA}(-A)^\alpha u_0 - (-A)^\alpha u_0\right\| \\ & + \left\|\int_0^t (-A)^\alpha e^{(t-s)A}\left[f(s)(-A)^{-\alpha} y(s) - f(s,u_0)\right] ds\right\| \\ & + \left\|\int_0^t (-A)^\alpha e^{(t-s)A} f(s,u_0)\, ds\right\| \\ & \leq \frac{\delta}{2} + C_\alpha\left(L \sup_{0\leq s\langle t_1} \left\|(-A)^{-\alpha} y(s) - u_0\right\|_\alpha\right) \underbrace{\int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds}_{\leq \frac{1}{1-\alpha} t_1^{-\alpha+1}} \\ & + C_\alpha B \underbrace{\int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds}_{\leq \frac{1}{1-\alpha} t_1^{-\alpha+1}} \\ \leq & \frac{\delta}{2} + C_\alpha L\delta \frac{1}{1-\alpha} t_1^{-\alpha+1} + C_\alpha B \frac{1}{1-\alpha} t_1^{-\alpha+1} \\ \leq & \frac{\delta}{2} + C_\alpha \frac{1}{1-\alpha}(L\delta + B) t_1^{1-\alpha} = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,\end{aligned}$$

d.h. $F : S \to S$. *Weiter gilt:*

$$\begin{aligned}&\|Fy_1(t) - Fy_2(t)\| \\ &\leq \int_0^t \left\|(-A)^{-\alpha} e^{(t-s)A}\right\| \left\|f\left(s,(-A)^{-\alpha} y_1(s)\right) - f\left(s,(-A)^{-\alpha} y_2(s)\right)\right\| ds \\ &\leq C_\alpha L \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \left\|(-A)^\alpha y_1(s) - (-A)^{-\alpha} y_2(s)\right\|_\alpha ds \\ &\leq C_\alpha L (1-\alpha)^{-1} t^{1-\alpha} \|y_1 - y_2\|_Y \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_Y, \quad y_1, y_2 \in S\end{aligned}$$

Dann folgt mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass ein $y \in S$ *mit*

$$y(t) = e^{tA}(-A)^\alpha u_0 + \int_0^t (-A)^\alpha e^{(t-s)A} f\left(s,(-A)^{-\alpha} y(s)\right) ds, \quad t \in [0,t_1]$$

existiert.

Schritt 2: *Regularität*
Da y *stetig, folgt, dass* $t \mapsto f\left(t,(-A)^{-\alpha} y(t)\right)$ *stetig auf* $[0,t_1]$ *ist, d.h.* $\exists N > 0$*:*

$$\left\|f\left(t,\cdot(-A)^{-\alpha} y(t)\right)\right\| \leq N, \quad t \in [0,t_1].$$

Sei $\beta \in (0,1-\alpha)$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\left\|\left(e^{hA} - Id\right)(-A)^\alpha e^{(t-s)A}\right\| &\leq C_\beta h^\beta \left\|(-A)^{\alpha+\beta} e^{(t-s)A}\right\| \\ &\leq C_\beta C_{\alpha+\beta} h^\beta \frac{1}{(t-s)^{\alpha+\beta}}, \quad h \in (0,1),\end{aligned}$$

da

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(e^{hA} - Id\right) x \right\| &= \left\| \int_0^h \frac{d}{ds} e^{sA} x \; ds \right\| \\
= \left\| \int_0^h A e^{sA} x \; ds \right\| &= \left\| \int_0^h (-A)^{1-\beta} e^{sA} (-A)^{\beta} x \; ds \right\| \\
&\leq \widetilde{C}_\beta \int_0^h s^{\beta-1} \; ds \left\| (-A)^{\beta} x \right\| \\
&= C_\beta h^\beta \left\| (-A)^{\beta} x \right\|, \quad t_1 \in (0,1), x \in D\left((-A)^\beta\right).
\end{aligned}
$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\| y(t+h) - y(t) \| \leq & \left\| \left(e^{hA} - Id\right) (-A)^\alpha e^{tA} u_0 \right\| \\
& + \int_0^t \left\| \left(e^{hA} - Id\right) (-A)^\alpha e^{(t-s)A} f\left(s, (-A)^{-\alpha} y(s)\right) \right\| ds \\
& + \int_t^{t+h} \left\| (-A)^\alpha e^{(t+h-s)A} f\left(s, (-A)^{-\alpha} y(s)\right) \right\| ds \\
& =: I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}
$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& I_1 \leq C t^{-(\alpha+\beta)} h^\beta \|u_0\| \leq M_1 h^\beta, && 0 < t_0 < t < t+h < t_1, \\
& I_2 \leq C N h^\beta \int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\beta)} \, ds \leq M_2 h^\beta, && 0 < t < t+h < t_1, \\
& I_3 \leq C \alpha N \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha} \, ds \leq M_3 h^\beta, && 0 < t < t+h < t_1.
\end{aligned}
$$

Beachte: M_2, M_3 sind unabhängig von $t \in [0, t_1]$, aber $M_1 \mapsto \infty$ für $t \to \infty$. Insbesondere folgt:

$$
\| y(t) - y(s) \| \leq C |t-s|^\beta, \quad 0 < t_0 \leq t, s \leq t_1
$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\left\| f\left(s, (-A)^{-\alpha} y(s)\right) - f\left(t, (-A)^{-\alpha} y(t)\right) \right\| &\leq L \left(|t-s|^\beta + \|y(t) - y(s)\| \right) \\
&\leq C_1 \left(|t-s|^\nu + |t-s|^\beta \right), \quad 0 < t_0 < t, s \leq t_1
\end{aligned}
$$

Wir betrachten die Lösung u von

$$
\begin{cases}
u'(t) - Au(t) & = f\left(t, (-A)^\alpha y(t)\right), \\
u(0) & = u_0.
\end{cases}
$$

Mit Satz (XIII.8) *folgt* $u \in C^1\left(\left(0, t\right), X\right)$,

$$u\left(t\right) = e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f\left(s, \left(-A\right)^{-\alpha} y\left(s\right)\right) ds$$

und $u\left(t\right) \in D\left(A\right) \subset D\left(\left(-A\right)^{\alpha}\right)$. *Damit folgt*

$$\left(-A\right)^{\alpha} u\left(t\right) = e^{tA} \left(-A\right)^{\alpha} u_0 + \int_0^t \left(-A\right)^{\alpha} e^{(t-s)A} f\left(s, \left(-A\right)^{-\alpha} y\left(s\right)\right) ds$$

und wegen der Eindeutigkeit des Fixpunktes folgt dann

$$u\left(t\right) = \left(-A\right)^{-\alpha} y\left(t\right).$$

XIV. Sobolev-Räume

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets ein nicht zwingend beschränktes Gebiet.

XIV.1. Dichtheit von glatten Funktionen

ma:lokapp **Lemma XIV.1** (Lokale Approximation)**.** *Sei* $p \in [1, \infty)$, $f \in W^{m,p}(\Omega)$ *und* $D \Subset \Omega$. *Setze* $\delta = \operatorname{dist}(D, \partial\Omega)$ *und betrachte den Mollifier* η_ε *mit* $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$. *Dann gilt für* $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||f_\varepsilon - f||_{W^{m,p}(D)} = 0.$$

Beweis:. *Da* $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon(x - \cdot) \Subset \Omega$ *folgt*

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha f_\varepsilon(x) &= \nabla^\alpha(\eta_\varepsilon * \chi_\Omega) f(x) = \int_\Omega \nabla_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \nabla_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) \nabla_y^\alpha f(y) \,\mathrm{d}y \\ &= (\nabla^\alpha f)(x), \quad x \in D. \end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} ||\eta_\varepsilon * g - g||_{L^p(\Omega)} = 0$ *für alle* $g \in L^p(\Omega)$ *folgt die Behauptung.*

hm:dicht **Theorem XIV.2.** *Sei* $p \in [1, \infty)$. *Dann gilt*

$$\overline{W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{W^{m,p}(\Omega)}} = W^{m,p}(\Omega).$$

Beweis:. *Sei* (Ω_k) *eine lokal endliche Überdeckung von* Ω *mit* $\Omega_k \Subset \Omega$ *und* (φ_k) *eine untergeordnete Zerlegung der Eins, d.h.* $\operatorname{supp} \varphi_k \subset \Omega_k$. *Zu* $\varepsilon > 0$ *existiert nach Lemma XIV.1*

$$f_{k,\varepsilon} \in C^\infty(\Omega_k) \cap W^{m,p}(\Omega)$$

mit

$$||f - f_{k,\varepsilon}||_{W^{m,p}(\Omega_k)} \leq \frac{\varepsilon 2^{-k}}{1 + \|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega_k})}}.$$

Setze $f_\varepsilon := \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k f_{k,\varepsilon}$. *Die Produktregel ergibt (ÜA)* $\partial_i(\varphi_k f) = (\partial_i \varphi_k) f + \varphi_k \partial_i f$ *und daher*

$$\nabla^\alpha(\varphi_k f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \nabla^{\alpha - \beta} \varphi_k \nabla^\beta f.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
||\nabla^\alpha f_\varepsilon - \nabla^\alpha f||_{L^p(\Omega)} &= ||\nabla^\alpha \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k (f_{k,\varepsilon} - f) \right) ||_{L^p(\Omega)} \\
&= || \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k\in\mathbb{N}} \nabla^{\alpha-\beta} \varphi_k (\nabla^\beta f_{k,\varepsilon} - \nabla^\beta f)||_{L^p(\Omega)} \\
&\le C(\alpha,\beta) \sum_{k\in\mathbb{N}} ||\varphi_k||_{C^m(\overline{\Omega})} ||\nabla^\beta (f_{k,\varepsilon} - f)||_{L^p(\Omega)} \le C(\alpha,\beta,\Omega)\varepsilon.
\end{aligned}$$

XIV.2. Fortsetzungsoperatoren

thm:fortsetzung

Theorem XIV.3. *Sei $p \in [1,\infty)$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet von der Klasse C^m oder $\mathbb{R}^m_+$. Dann existiert ein konsistenter* Fortsetzungsoperator $F \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^p(\mathbb{R}^n))$ *mit*

- $Fu|_\Omega = u, \;\; u \in L^p(\Omega).$
- $||Fu||_{W^{k,p}(\Omega)} \le C(\Omega)||u||_{W^{k,p}(\Omega)}, \;\; u \in W^{k,p}(\Omega), \;\; k \le m.$

Beweis:. *(Idee für k=1, Rest (ÜA))*
Schritt 1: $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$. *Sei* $u \in C^1(\mathbb{R}^n_+) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. *Setze*

$$\tilde{u}(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n) & , x_n > 0 \\ u(x', -x_n) & , x_n < 0 \end{cases}.$$

Dann gilt (ÜA)

- $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,
- $||\tilde{u}||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le 2||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$,
- $\tilde{u}|_{\mathbb{R}^n_+} = u$.

Wir definieren $Fu = \tilde{u}$ und setzen F mit Theorem XIV.2 auf $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ bzw. $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ fort.
Schritt 2: *(Lokalisieren)*
Sei (Ω_j) eine lokal endliche Überdeckung und (φ_j) eine dazu untergeordnete Zerlegung der Eins.

$$\begin{aligned}
(T_j u)(x) &= u(\Phi_j^{-1}(x)) \\
\hat{\Omega}_j &= \Phi(\Omega_j)
\end{aligned}$$

Sei $u \in L^p(\Omega)$. Wir definieren

$$(Fu)(x) = \begin{cases} \sum_j \varphi_j T_j^{-1} F_{\mathbb{R}^n_+} T_j(\varphi_j u) & , x \in \bigcup \Omega_j \\ 0 & , \mathit{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt

- $||T_j \varphi_j u||_{W^{k,p}(\hat{\Omega}_j)} \leq C||u||_{W^{k,p}(\Omega_j \hat{\cap} \Omega)}$,
- $Fu \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n),\ u \in W^{k,p}(\Omega),\ k \leq m$,
- $||T_j^{-1} F_{\mathbb{R}^n_+} T_j \varphi_j u||_{W^{k,p}(\Omega_j)} \leq C||u||_{W^{k,p}(\Omega_j \hat{\cap} \Omega)}$,
- $Fu|_\Omega = u$.

Bemerkung XIV.4. *Sei $p \in [1, \infty),\ k \in \mathbb{N}_0$. Setze*

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Dann gilt $E_0 \in \mathcal{L}(W_0^{k,p}(\Omega), W^{k,p}(\Omega))$, wobei E_0 die Fortsetzung mit 0 auf $\mathbb{R}^n$ ist (vgl. Theorem XIV.7).

Korollar XIV.5. *Sei $p \in [1, \infty)$, Ω beschränktes Gebiet von der Klasse C^m oder $\mathbb{R}^n_+$. Dann gilt*

$$\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)|_\Omega}^{||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}} = W^{k,p}(\Omega),\ k \leq m.$$

Beweis:. *Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann existiert $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} ||\varphi_n - Fu||_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = 0$.*

XIV.3. Spuroperatoren

Proposition XIV.6. *Sei $p \in [1, \infty)$. Dann existiert eine stetige Abbildung*

$$\Gamma_{\mathbb{R}^n_+} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \to L^p(\mathbb{R}^{n-1})$$

mit

$$\Gamma_{\mathbb{R}^n_+} u = u|_{\partial\mathbb{R}^n_+},\ u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n}).$$

Beweis:. *(ÜA)*

thm:14.7 **Theorem XIV.7.** *Sei $p \in [1, \infty)$, dann gilt $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ genau dann, wenn $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ und $\Gamma_{\mathbb{R}^n_+}(u) = 0$.*

Beweis:. $\Longrightarrow$*: ÜA*
$\Longleftarrow$*: Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ mit $\Gamma_{\mathbb{R}^n_+}(u) = 0$ und $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} = 0$. O.B.d.A. sei $\operatorname{supp} u$ kompakt.*
Schritt 1: $E_0 u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} E_0(\nabla^\alpha u)\varphi &= \int_{\mathbb{R}^n_+} (\nabla^\alpha u)\varphi = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n_+} (\nabla^\alpha u_n)\varphi \\ &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n_+} u_n(\nabla^\alpha \varphi) + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} u_n\varphi \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n_+} u(\nabla^\alpha\varphi) + \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Gamma_{\mathbb{R}^n_+} u_n \varphi \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} E_0 u(\nabla^\alpha\varphi), \quad |\alpha| \le 1, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

da

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \Gamma_{\mathbb{R}^n_+} u_n \varphi \right\|_{L^1(\partial\mathbb{R}^n_+)} \le \lim_{n\to\infty} \left\| \Gamma_{\mathbb{R}^n_+} u_n \right\|_{L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\partial\mathbb{R}^n_+)} = 0.$$

Schritt 2: Betrachte

$$(T(h)u)(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n - h) & x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > h \\ 0 & x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \in (0,h) \end{cases}$$

Dann gilt:

- $$\lim_{h\to 0} \|T(h)u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} = 0, f \in L^p(\mathbb{R}^n_+) \text{ (ÜA)}, \tag{XIV.1}$$ eq:zerobo
- $E_0 T(h)u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *nach Schritt 1,*
- $\operatorname{supp} T(h)u \subset \left\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+, x_n > h\right\} =: \mathbb{R}^n_{+,h}$.

Sei nun $\eta_{k/2}$ *ein Mollifier mit supp* $\eta_{k/2} \subset B(0, h/2)$. *Zu* $\epsilon > 0$ *wähle* $k > 0$ *mit* $\left\|\eta_{k/2} * T(h)u - T(h)u\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le \epsilon$. *Dann gilt* $\eta_{k/2} * T(h)u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und supp* $\eta_{k/2} * T(h)u \subset \mathbb{R}^n_{+,h/2}$. *Mit* (XIV.1) *folgt die Behauptung.*

thm:14.8 **Theorem XIV.8.** *Sei* $p \in [1, \infty)$ *und* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt und von der Klasse* C^1. *Dann existiert eine eindeutige Abbildung* $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ *mit* $\Gamma_\Omega u = u|_{\partial\Omega}$, $u \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$.

Beweis:. *Nach Vorraussetzung existiert eine Überdeckung des Randes von* Ω. *Seien* $\phi_k, \phi_k^{-1}, \varphi_k$ *mit* $\phi_k \subset B_k$ *wie im Beweis vom Theorem XIV.3. Weiter sei* $\Psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \Psi_j \le 1$, *supp* $\varphi_j \Subset \{\Psi_j = 1\}$. *Wir definieren*

$$\Gamma_\Omega u = \sum_j \varphi_j(\Gamma_{\mathbb{R}^n_+}(\Psi_j u \circ \phi_j)) \circ \phi_j^{-1}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\Gamma_\Omega u)(x) &= \sum \varphi_j(x)(\Gamma_{\mathbb{R}^n_+}(\Psi_j u) \circ \phi_j) \circ \phi_j^{-1}(x) = \sum \varphi_j(x)(\Psi_j u) \circ \phi_j) \circ \phi_j^{-1}(x) \\ &= \sum \varphi(x)\Psi_j(x)u(x) = u(x), \quad x \in \partial\Omega, \ u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+).\end{aligned}$$

thm:14.9 **Theorem XIV.9.** *Sei $p \in [1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und von Klasse C^1. Dann gilt $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ genau dann, wenn $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $\Gamma_\Omega u = 0$.*

Beweis:. *Verwende Theorem XIV.7 und lokalisiere (ÜA).*

em:14.10 **Bemerkung XIV.10.** *$\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ ist nicht surjektiv. Man kann zeigen, dass*

$$\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$$

surjektiv ist. Hierbei ist

$$W^{s,p}(\partial\Omega) = \left\{ u \in L^p(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy < \infty \right\}, s \in (0,1).$$

XIV.4. Riesz-Thorin Konvexitätstheorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Dann sind (ÜA):

- $L^1 \cap L^\infty(\Omega) = L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ mit $\|f\|_{1\cap\infty} = \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty}$
- $L^1 + L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \exists g \in L^1(\Omega), h \in L^\infty(\Omega), f = g + h \}$ mit

$$\|f\|_{1+\infty} = inf \left\{ \|h\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^1(\Omega)}, f = g + h \right\}$$

Banachräume.

hm:14.11 **Theorem XIV.11.** *Sei $p \in [1, \infty]$. Dann gilt $L^p(\Omega) \subset L^1 + L^\infty(\Omega)$.*

Beweis:. *Die Fälle $p = 1, \infty$ sind klar.*
Sei $f \in L^p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$ und setze $A := \{x \in \Omega : |f(x)| \leq 1\}$ und

$$h = \chi_A f, \quad g = \chi_{\Omega\setminus A} f.$$

Dann gilt $h \in L^\infty(\Omega)$ und $g \in L^1(\Omega)$, da

$$\int_\Omega \left|\chi_{\Omega\setminus A} f\right| \leq \int_\Omega \left|\chi_{\Omega\setminus A} f\right|^p \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

hm:14.12 **Theorem XIV.12.** *Sei $T : L^1 + L^\infty(\Omega) \to L^1 + L^\infty(\Omega)$ linear. Für $\alpha \in (0,1)$, $p_0 \geq 1$, und $1/p_0 + 1/p_1 = 1$ setze $1/p_\alpha = (1-\alpha)/p_0 + \alpha/p_1$, $1/r_\alpha = (1-\alpha)/r_0 + \alpha/r_1$. Weiter sei $T|_{L^{p_0}(\Omega)} \in \mathcal{L}(L^{p_0}(\Omega), L^{r_0}(\Omega))$ und $T|_{L^{p_1}(\Omega)} \in \mathcal{L}(L^{p_1}(\Omega), L^{r_1}(\Omega))$. Dann gilt*

$$\left\|T|_{L^{p_\alpha}(\Omega)}\right\|_{L^{p_\alpha}(\Omega)} \leq \left\|T|_{L^{p_0}(\Omega)}\right\|_{L^{p_0}(\Omega)}^{1-\alpha} \left\|T|_{L^{p_1}(\Omega)}\right\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{\alpha}.$$

Zum Beweis benötigen wir:

thm:14.13 **Theorem XIV.13** (3-Linien-Satz)**.** *Sei* $f : S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(z) \leq 1\} \to \mathbb{C}$ *analytisch und beschränkt,*

$$M_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(it)|\,, M_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(1+it)|\,.$$

Dann gilt

$$|f(x+iy)| \leq M_0^{1-x} M_1^x, \quad x+iy \in S$$

Beweis:. *Setze* $f_\epsilon(x+iy) = e^{\epsilon(x+iy)^2} f(x+iy) M_0^{x+iy-1} M_1^{-(x+iy)}$, $\epsilon > 0$, $x+iy \in S$. *Dann folgt mit* $\left|e^{\epsilon(x+iy)^2}\right| = e^{\epsilon x^2 - \epsilon y^2}$

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(iy)| &\leq 1 M_0 M_0^{-1} = 1, \\ |f_\epsilon(1+iy)| &\leq e^\epsilon M_1 M_1^{-1} = e^\epsilon, \\ \lim_{y\pm\to\infty} \sup_{0\leq x\leq 1} |f_\epsilon(x+iy)| &= 0. \end{aligned}$$

Mit dem Maximumsprinzip für ein hinreichend großes Rechteck erhalten wir $|f_\epsilon(z)| \leq max\,\{1, e^\epsilon\}$. *Aus* $\epsilon \to 0$ *folgt die Behauptung.*

lma:14.14 **Lemma XIV.14.** *Sei* $p \in (p_0, p_1)$ *und* $f = \sum_{j=1}^N \alpha_j a_j \chi_{E_j}$ *eine Stufenfunktion mit* $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $|\alpha_j| \leq 1$, $a_j > 0$, E_j *paarweise disjunkt. Weiter sei* $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 1$ *und*

$$f_z = \sum_{j=1}^N \alpha_j a_j^{p/p_z} \chi_{E_j}$$

mit $p_z = (1-z)/p_0 + z/p_1$, $0 \leq Re(z) \leq 1$. *Dann gilt*

$$\|f_z\|_{L^{p_{Re(z)}}} = 1$$

.

Beweis:. *Es gilt* $\int_\Omega |f_z(x)|^{p_{Re(z)}} = \sum_{i=1}^N a_j^p\,|E_j| = \|f\|^p_{L^p(\Omega)} = 1$.

Nun zum Beweis von Riesz-Thorin:

Beweis:. *Seien f, f' Stufenfunktionen auf* Ω, *welche* $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f'\|_{L^{r'}(\Omega)} = 1$ *genügen. Weiter seien* f_z, f'_z *wie in Lemma XIV.14, wobei wir* f_z *mit* p_0 *und* p_1 *und* f'_z *mit* r'_0 *und* r'_1 *wählen. Wir setzen* $M_j = \left\|T|_{L^{p_j}(\Omega)}\right\|_{(L)(L^{p_j}(\Omega), L^{r_j}(\Omega)}$. *Nach Vorrausetzung ist*

$$z \mapsto \phi(z) = \int_\Omega f'_z(x) T f_z(x)\,\mathrm{d}x$$

analytisch in S. Weiter folgt mit Lemma XIV.14

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\phi(j+iy)| \leq \left\|f'_z\right\|_{L^{r'_j}(\Omega)} M_j \|f_z\|_{L^p(\Omega)} \leq M_j, \quad j = 0, 1.$$

Mit dem 3-Linien-Satz folgt nun

$$\left|\int_\Omega f'(x)Tf(x)\,\mathrm{d}x\right| \le M_0^{1-\alpha}M_1^\alpha.$$

Da die Stufenfunktionen dicht in $L^p(\Omega)$ *und* $L^{r'}(\Omega)$ *sind, folgt*

$$\left\|T|_{L^{p_\alpha}(\Omega)}\right\|_{\mathcal{L}(L^{p_\alpha}(\Omega),L^{r_\alpha}(\Omega))} \le M_0^{1-\alpha}M_1^\alpha.$$

XIV.5. Sobolevsche Einbettungssätze

bettung1n

Theorem XIV.15. *Sei* $p \in [1,n)$*. Dann gilt:*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n), \text{ mit } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

und

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\ f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis:. <u>Schritt 1:</u> $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ *Sei* $i \in \{1,\dots,n\}$*. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}|u(x_1,\dots,,x_n)| &= |\int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots,x_n)dt|\\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots,x_n)|dt\\ &=: f_i(\tilde{x}_i),\end{aligned}$$

d.h. $\|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \le \|\partial_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$*. Damit und mit* $|u(x)|^n \le \prod_{i=1}^n |f_i(\tilde{x}_i)|$ *folgt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n |f_i(\tilde{x}_i)|^{\frac{1}{n-1}} \overset{(\ddot{U}A)}{\le} \prod_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}},$$

also

$$(**)\ \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \le \prod_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}. \tag{XIV.2}$$

eq:sob1

Wir wenden (XIV.2) *auf* $|u|^t,\ t>1$ *anstatt* u *an. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\|u\|^t_{L^{\frac{tn}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} &= (\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{tn}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}} \le \prod_{i=1}^n \|\underbrace{t|u|^{t-1}\partial_i u}_{=\partial_i|u|^t}\|^{\frac{1}{n}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\\ &\le t\prod_{i=1}^n \||u|^{t-1}\partial_i u\|^{\frac{1}{n}}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le t\|u\|^{t-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^n \|\partial_i u\|^{\frac{1}{n}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Wähle nun t so, dass $\frac{tn}{n-1} = p'(t-1)$, d.h. $t = \frac{n-1}{n}p^* > 1$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|u\|^t_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} &\leq t\|u\|^{t-1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^n \|\partial_i u\|^{\frac{1}{n}}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq t\|u\|^{t-1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{n-1}{n}p^*\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Schritt 2:
Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und $(u_k) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_{k\to\infty} u_k = u$. Damit folgt mit Schritt 1

$$\|u_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

$(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ und damit konvergiert eine Teilfolge fast überall, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

cor:SobEinbettungr

Korollar XIV.16. *Sei $p \in [1, n)$. Dann gilt*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n) \text{ mit } r \in [p, p^*].$$

Beweis:. *Setze $\theta \in (0,1)$ mit $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$. Mit Riesz-Thorin (angewendete auf $T = Id$) folgt:*

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\theta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}) \\ &\leq C(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

thm:Morrey

Theorem XIV.17 (Morrey)**.** *Sei $p > n$. Dann gilt:*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Ferner gilt für $\theta = 1 - \frac{n}{p}$

$$|f(x) - f(y)| \leq C_{n,p}|x-y|^\theta \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ für f.a. } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

ohne Beweis.

m: SobEinbettungninf

Theorem XIV.18. *Es gilt:*

$$W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n), \text{ für } r \in [n, \infty).$$

ohne Beweis.

:SobEinbettungGebiet

Theorem XIV.19. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und von der Klasse C^1.*

(a) Sei $p \in [1, n)$. Dann gilt:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \text{ für } r \in [1, p^*] \text{ mit } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

(b) Es gilt

$$W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \text{ für } r \in [1, \infty).$$

(c) Sei $p > n$. Dann gilt

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \text{ für } r \in [1, \infty]$$

und für $\theta = 1 - \frac{n}{p}$

$$|f(x) - f(y)| \leq C_{n,p}|x-y|^\theta \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ für f.a. } x, y \in \Omega.$$

Beweis:. *(a) Mit Theorem XIV.15 folgt*

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq \|\mathcal{F}f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\|\mathcal{F}f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ für } f \in W^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Nun folgt (a) mit der Hölder-Ungleichung.
(b), (c) analog.

gOmegaMp **Korollar XIV.20.** *Sei $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und von der Klasse C^m oder $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_+$. Dann gilt:*

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega),\ r \in [p, p^*],\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$

(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega),\ r \in [p, \infty]$

(c) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ *mit*

$$|(D^\alpha f)(x) - (D^\alpha f)(y)| \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}|x-y|^\theta,$$

wobei $\theta = m - \frac{n}{p} - k$, $\theta \in (0,1)$, $k = [m - \frac{n}{p}]$ und $|\alpha| = k$.

Beweis:. *(a), (b) (ÜA), (c) ohne Beweis.*

Als nächstes beweisen wir eine L^p-Variante von Arzela-Ascoli.

AscoliLp **Theorem XIV.21.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty)$ und $M \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Es gelte:*

(a) $\forall \varepsilon, \Omega' \Subset \Omega\, \exists \delta \in (0, dist(\Omega', \Omega^c)) : \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon$ *für* $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| < \delta$, $f \in M$.
Hier: $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$.

(b) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \Omega' \Subset \Omega : \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} \leq \varepsilon$ *für* $f \in M$

Dann ist M kompakt im $L^p(\Omega)$.

Beweis:. *(Skizze, vgl. [Ada75, Theorem 2.32]). Sei zunächst* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *und* $\varepsilon > 0$. *Nach (b) existiert ein* $\Omega' \Subset \Omega$ *mit*

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\Omega')} \leq \varepsilon,\ f \in M.$$

Sei nun (η_n) *ein Mollifier. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\|\eta_n * \phi - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_n(y)[(\tau_y\phi)(x) - \phi(x)]\,\mathrm{d}y\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \sup_{h\in B(0,\frac{1}{n})} \|\tau_h\phi - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \phi \in C_c(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Da $C_c(\mathbb{R}^n)$ *dicht in* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *ist, existiert für* $f \in M$ *eine Folge* $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ *mit*

$$\lim_{j\to\infty} \phi_j = f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere gilt für $n \in \mathbb{N}$ *und* $h > 0$

$$\lim_{j\to\infty} \eta_n * \phi_j = \eta_n * f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n), \quad \lim_{j\to\infty} \tau_h * \phi_j = \tau_h * f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n). \tag{XIV.3}$$

eqn:Konv

Daher gilt für $f \in M$, $n < 1/\delta$ *und* $j \in \mathbb{N}$ *groß genug*

$$\begin{aligned}\|\eta_n * f - f\|_{L^p(\Omega')} &\leq \|\eta_n * f - \eta_n * \phi_j\|_{L^p(\Omega')} + \|\eta_n * \phi_j - \phi_j\|_{L^p(\Omega')} + \|\phi_j - f\|_{L^p(\Omega')}\\ &\leq \varepsilon + \sup_{h\in B(0,\frac{1}{n})} \|\tau_h * \phi_j - \phi_j\|_{L^p(\Omega')} + \varepsilon\\ &\leq 3\varepsilon + \sup_{h\in B(0,\frac{1}{n})} \|\tau_h * f - f\|_{L^p(\Omega')} \leq 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt Voraussetzung (a) benutzt. Im Folgenden sei n *fest gewählt. Da* $M' := \{\eta_n * f,\ f \in M\}$ *relativ kompakt in* $C(\overline{\Omega'})$ *ist (ÜA), existiert eine endliche Menge von Funktionen* $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \subset C(\overline{\Omega'})$ *mit*

$$M' \subset \bigcup_{j=1}^m B(\psi_j, \varepsilon),$$

d.h. $\exists C > 0 : \forall f \in M\ \exists j \in \{1, \ldots, m\}$ *mit*

$$|\psi_j(x) - (\eta_n * f)(x)| \leq C\varepsilon,\ x \in \overline{\Omega'}.$$

Mit (XIV.3) *und (a) folgt nun* $\|f - E_0\psi_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 5\varepsilon$ *für* $j \in \{1, \ldots, m\}$, *d.h.*

$$M = \bigcup_{j=1}^m B(E_0\psi_j, 5\varepsilon),$$

d.h. M *ist total beschränkt, also relativ kompakt.*
Der allgemeine Fall folgt mit $\Omega = \mathbb{R}^n$ *und* $\widetilde{M} = \{E_0 f : f \in M\}$.

n:Rellich **Theorem XIV.22.** *(Rellich)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und von der Klasse C^1, $p \in [1,\ \infty)$. Dann gilt:

(a) Sei $p < n$. $W^{1,p}(\Omega) \overset{kp}{\hookrightarrow} L^r(\Omega)$, $r \in [1, p^*)$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

(b) Sei $p = n$. $W^{1,n}(\Omega) \overset{kp}{\hookrightarrow} L^r(\Omega)$, $r \in [1, \infty)$.

(c) Sei $p > n$. $W^{1,p}(\Omega) \overset{kp}{\hookrightarrow} C(\bar{\Omega})$.

Beweis:. *(a) Sei B die Einheitskugel in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Weiter sei $\theta \in (0.1]$ mit $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{p^*}$ und $\Omega' \Subset \Omega$ und $|h| < dist(\Omega', \Omega^c)$. Dann folgt mit Riesz-Theorem*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^r(\Omega')} \leq \|\tau_h u - u\|_{L^1(\Omega')}^{\theta} \|\tau_h u - u\|_{L^{p^*}(\Omega')}^{1-\theta} \overset{ÜA}{\leq} C|h|^{\theta} \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}^{\theta} \left(2 \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{\theta}\right)^{1-\theta}$$

$$\leq C|h|^{\theta} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{\theta} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta} \leq C|h|^{\theta}, \quad u \in B.$$

Weiter gilt für geeignetes $\Omega' \Subset \Omega$

$$\|u\|_{L^r(\Omega \setminus \Omega')} = \left(\int\limits_{\Omega \setminus \Omega'} |u(x)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \setminus \Omega')} |\Omega \setminus \Omega'|^{1 - \frac{r}{p^*}} \leq |\Omega \setminus \Omega'|^{1 - \frac{r}{p^*}} < \epsilon, \quad u \in B.$$

Die Behauptung folgt nun aus Theorem XIV.21.

(b) Analog.

(c) Sei $p > n$, B die Einheitskugel in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Wegen

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}, \quad f \in B,$$

mit $\alpha > 0$ ist f gleichmäßig, gleichgradig stetig. Der Satz folgt aus dem Satz von Arzela-Ascoli.

XV. Der Laplace-Operator und semilineare Probleme

XV.1. Besselpotential-Räume

Definition & Lemma XV.1. *Sei $p \in (1,\ \infty)$, $s \in \mathbb{R}$. Wir definieren*

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) :\ \exists g \in L^p(\mathbb{R}^n) :\ \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}g \right\}.$$

$H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ *heißt* Bessel-Potential Raum *.*

Theorem XV.2. *Sei $p \in (1,\ \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \ = \ H^{k,p}(\mathbb{R}^n).$$

Weiter gilt

$$L^p(\mathbb{R}^n) \ = \ H^{0,p}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis:. *(Für den Fall $k = 2$): Sei $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $g := \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)\mathcal{F}u \in S'(\mathbb{R}^n)$. Nach Voraussetzung gilt*

$$\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)\mathcal{F}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

und

$$u = \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}g.$$

Allgemeiner Fall:

$$g := \mathcal{F}^{-1}\frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}{1+|\xi|^k}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^k)\mathcal{F}u}_{\in L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

ÜA: Zeige $\frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}{1+|\xi|^k}$ ist ein Fouriermultiplikator von auf $L^p(\mathbb{R}^n)$.
Umgekehrt sei $u \in H^{k,\ p}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\mathcal{F}^{-1}(|i\xi|^\alpha)\mathcal{F}u = \mathcal{F}^{-1}\frac{|i\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2))^{\frac{k}{2}}\mathcal{F}u}_{g\in L^p(\mathbb{R}^n)},$$

d. h. $\nabla^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leq k$ (Beachte: $\frac{|i\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}$ ist ein Fouriermultiplikator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$).

Bemerkung XV.3. *Achtung: Sei $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}_0$. Dann gilt $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $p = 2$.*

XV.2. Gebrochene Potenzen des Laplace-Operators

thm:gebrochenePot

Theorem XV.4. *Sei $p \in (1, \infty)$ und $\alpha \in (0,1)$. Dann gilt*

$$\mathrm{D}\left((-\Delta_{\mathbb{R}^n}^{\alpha})\right) = H^{2\alpha,p}(\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere gilt

$$D\left(\sqrt{-\Delta}\right) = H^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis:. *Da $\frac{|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^\alpha}$ ein Fouriermultiplikator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist, folgt $H^{2\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \subset D\left((-\Delta_{R^n}^{\frac{p}{2}})\right)$.*
Sei umgekehrt $u \in D((-\Delta^\alpha))$, d. h. $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}^{-1}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt (ÜA)

$$\mathcal{F}^{-1} \underbrace{\frac{(1+|\xi|^2)^\alpha}{1+|\xi|^{2\alpha}}} \mathcal{F} \underbrace{\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^{2\alpha})\mathcal{F}u}_{\in L^p(\mathbb{R}^n)} =: g \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

und $u = \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^\alpha \mathcal{F}g$, d. h. $u \in H^{2\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$.

XV.3. Semilineare Probleme

In diesem Abschnitt sei $A := \Delta_{\mathbb{R}^n}$ und $f:\ \mathrm{D}\left(\sqrt{-\Delta_{\mathbb{R}^n}}\right) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in (1,\ \infty)$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} &u'(t) - \Delta u(t) = f\left(u(t)\right), \quad t > 0, \\ &u(0) = u_0. \end{aligned} \tag{XV.1}$$

Waermelei

thm:LoesungWaerme

Theorem XV.5. *Sei $\alpha = \frac{1}{2}$. Sei entweder*

(a) *$f(u) = u^r$, $r \geq 1$, $p > n$ oder*

(b) *$f(u) = u\ \partial_j u$, $p > n$.*

Dann existiert ein $T > 0$ und eine eindeutige Lösung von XV.1 im Sinne von Theorem XIII.10 für $u_0 \in D(\Delta)$.

Beweis:. (a) *Theorem XIV.17 liefert*

$$\begin{aligned} \|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u_1^r - u_2^r\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \|(u_1 - u_2)\sum_{j=0}^{r-1} u_1^j u_2^{r-j-1}|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\, \||u_1 - u_2|(|u_1|^r + |u_2|^r)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\, \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\, \|(|u_1|^r + |u_2|^r)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\, \|u_1 - u_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\, (\|u_1\|^{p_1}_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_2\|^{p_2}_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}) \\ &\leq C\, \|u_1 - u_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad u_1,\ u_2 \in W^{1,\,p}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

(b) *Mit Theorem XIV.17 erhalten wir*

$$\begin{aligned}\|f(u_1)-f(u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \|u_1\ \partial_j u_1 - u_2\ \partial_j u_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u_1\ \partial_j u_1 - u_2\ \partial_j u_2 + u_2\ \partial_j u_1 - u_2\ \partial_j u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|(u_1-u_2)\ \partial_j u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u_2\ \partial_j (u_1-u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|(u_1-u_2)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\partial_j u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\partial_j u_1 - u_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\,\|u_1-u_2\|_{W^{1,\,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad u_1,\ u_2 \in W^{1,\,p}(\mathbb{R}^n),\ \|u_1\|_{W^{1,\,p}(\mathbb{R}^n)},\ \|u_1\|_{W^{1,\,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C.\end{aligned}$$

Der Rest folgt mit Theorem XIII.10.

Index

Literaturverzeichnis

Ada75 [Ada75] Robert A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

EI70 [ÈdI70] S. D. Èĭ del'man and S. D. Ivasišen. Investigation of the Green's matrix of a homogeneous parabolic boundary value problem. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 23:179–234, 1970.

Ehr54 [Ehr54] Leon Ehrenpreis. Solution of some problems of division. I. Division by a polynomial of derivation. *Amer. J. Math.*, 76:883–903, 1954.

Ehr55 [Ehr55] Leon Ehrenpreis. Solution of some problems of division. II. Division by a punctual distribution. *Amer. J. Math.*, 77:286–292, 1955.

Eva10 [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

Liz63b [Liz63] P. I. Lizorkin. (L_p, L_q)-multipliers of Fourier integrals. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 152:808–811, 1963.

Mal54 [Mal54] Bernard Malgrange. Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. II. Equations avec second membre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 238:196–198, 1954.

Mal55 [Mal56] Bernard Malgrange. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 6:271–355, 1955–1956.

Mik57 [Mik57] S.G. Mikhlin. Fourier integrals and multiple singular integrals. 1957.