

# Partielle Differentialgleichungen I

Matthias Geissert



# Inhaltsverzeichnis

<b>Motivation</b>	<b>v</b>
<b>I. Einführung</b>	<b>1</b>
<b>II. Die Methode der Charakteristiken</b>	<b>3</b>
II.1. Motivation anhand der Transportgleichung . . . . .	3
II.2. Allgemeiner Fall . . . . .	4
II.2.1. Herleitung einer ODE für $z(s)$ , $p(s)$ , $X(s)$ . . . . .	4
II.2.2. OBdA Rand von $\Omega$ 'lokal flach' . . . . .	5
II.2.3. Bestimmung der Anfangsdaten für $\Omega$ mit glatten Rand . . . . .	5
II.2.4. Nicht charakteristische Randdaten . . . . .	6
II.2.5. Lokale Lösungen . . . . .	7
II.2.6. Schwache Formulierung . . . . .	10
II.2.7. Inhomogenes Problem . . . . .	14
II.3. Die Wellengleichung . . . . .	14
II.3.1. Der Fall $n = 1$ . . . . .	14
II.3.2. Der Fall $n = 3$ . . . . .	16
II.3.3. Der Fall $n = 2$ . . . . .	19
<b>III. Harmonische Funktionen</b>	<b>23</b>
III.1. Grundlagen . . . . .	23
III.2. Eigenschaften von harmonischen Funktionen . . . . .	24
III.2.1. Mittelwerteigenschaft . . . . .	24
III.2.2. Maximumsprinzip . . . . .	25
III.3. Regularität . . . . .	26
III.4. Lokale Abschätzungen für harmonische Funktionen . . . . .	26
III.5. Liouville . . . . .	27
III.6. Analytische versus harmonische Funktionen . . . . .	27
III.7. Harnack-Ungleichung . . . . .	28
<b>IV. Einführung in die Distributionentheorie</b>	<b>29</b>
IV.1. Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$ . . . . .	29
IV.2. Elementare Operationen mit Distributionen . . . . .	31
IV.2.1. Multiplikation mit einer Funktion . . . . .	31
IV.2.2. Ableitung der Distribution . . . . .	31
IV.2.3. Der adjungierte Operator . . . . .	33
IV.3. Faltung . . . . .	33

IV.4. Fundamentallösung . . . . .	35
<b>V. Fundamentallösungen</b>	<b>37</b>
<b>VI. Greenfunktionen</b>	<b>39</b>
VI.1. Herleitung der Greenfunktion . . . . .	39
VI.2. Eigenschaften der Greenfunktion . . . . .	41
VI.3. Die Greenfunktion im Halbraum . . . . .	42
<b>VII Allgemeinere Differentialoperatoren</b>	<b>45</b>
<b>VIII Temperierte Distributionen</b>	<b>47</b>
VIII. Der Raum der schnell-fallenden Funktionen . . . . .	47
VIII. Temperierte Distributionen . . . . .	48
<b>IX. Fundamentallösung und Fouriertransformation</b>	<b>51</b>
<b>X. Fouriermultiplikatoren</b>	<b>55</b>
<b>XI. Operatortheorie</b>	<b>59</b>
XI.1. Abgeschlossene Operatoren . . . . .	59
XI.2. Das Bochnerintegral . . . . .	60
<b>Index</b>	<b>63</b>

# Motivation

Wir betrachten einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung und wollen die Wärmeleitung untersuchen. Dazu treffen wir folgende Annahmen:

- Der Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall  $[0, 1]$  und  $u(x, t)$  ist die Temperatur an der Stelle  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ .
- Konstanten:  $\rho$  Dichte,  $c$  spezifische Wärme
- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  Wärmequelle
- Energie in Segment  $[x_1, x_2] : E(x_1, x_2, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(x_1, t)$
- Sei  $Q(x, t)$  die thermische Energie durch den Punkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  und  $K_0$  die thermale Konduktivität. Dann gilt

$$\frac{Q(x, t_2) - Q(x, t_1)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(x, t_1).$$

- Energieerhaltung:

$$c\rho(x_2 - x_1)(u(x_1, t_2) - u(x_1, t_1)) = (t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1) \left( \frac{\partial}{\partial x} (u(x_1, t_1) - u(x_2, t_1)) \right).$$

Daraus folgt

$$\frac{u(x_1, t_2) - u(x_1, t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u(x_1, t_1) - u(x_2, t_1)}{x_1 - x_2} \right)$$

und somit

$$\partial_t u(x_1, t_1) = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_1, t_1), \quad (1)$$

wobei  $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$  die Konstante der thermischen Diffusivität ist. Gleichung (1) heißt Wärmeleitungsgleichung. Bei stationärer Temperaturverteilung gilt  $0 = \partial_t u(x, t)$  und damit

$$0 = f(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t).$$

Partielle Differentialgleichungen tauchen also in natürlicher Weise in Anwendungen auf. Im Rahmen dieser Vorlesung sind partielle Differentialgleichungen immer ohne Herleitung gegeben.



# I. Einführung

In diesem Abschnitt sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  stets ein Gebiet.

**Definition I.1.**

$$F(D^k u(\mathbf{x}), D^{k-1} u(\mathbf{x}), \dots, Du(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{I.1})$$

heißt partielle Differentialgleichung (PDE) k-ter Ordnung.

Hier ist  $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben und  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gesucht.

Wir untersuchen folgende Typen von PDE's.

**Definition I.2.** PDE (I.1) heißt

(a) *linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u - f(\mathbf{x}),$$

(b) *semi-linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \dots, \mathbf{x})$$

für  $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben,

(c) *quasi-linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1} u, \dots, \mathbf{x}) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \dots, \mathbf{x})$$

für  $a_\alpha, a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben und

(d) *voll nicht-linear*, falls in der Situation von (c)  $a_\alpha$  auch von  $D^k u$  abhängt.

Später werden wir sehen, dass sich der semi- und der quasi-lineare Fall mit Hilfe eines Fixpunktarguments auf den linearen Fall reduzieren lassen, wobei der quasi-lineare Fall technisch schwieriger ist. Später werden wir auch weitere Typen linearer PDE's diskutieren.

**Definition I.3.**

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{I.2})$$

heißt System von PDE's k-ter Ordnung. Hier ist  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \dots \times \mathbb{R}^m \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  gegeben und  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  gesucht.

## I. Einführung

**Beispiel I.4.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet.

(a) Laplace Gleichung:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

(b) Transportgleichung:

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(c) Wärmeleitungsgleichung:

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(d) Wellengleichung:

$$\partial_t^2 u(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(e) Navier-Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) + (\nabla_{\mathbf{x}} p)(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Hier ist  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  das gesuchte Geschwindigkeitsfeld und  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  der gesuchte (Druck). Die rechte Seite  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist gegeben.

Damit die PDE's eindeutig lösbar sind, müssen noch entsprechende Randbedingungen und/oder Anfangsbedingungen gefordert werden.

Typische Fragestellungen, die im Rahmen dieser Vorlesung untersucht werden sind:

- (a) Existenz.
- (b) Eindeutigkeit.
- (c) Regularität.
- (d) Abbildungsverhalten der Gleichung <sup>1</sup>.
- (e) Weitere Eigenschaften der Lösung.

In den folgenden Kapiteln diskutieren wir unterschiedliche Zugänge zur Beantwortung dieser Fragen. Leider lässt sich in nur wenigen Fällen die Lösung einer PDE explizit berechnen. Daher werden im Rahmen dieser Vorlesung sowohl "explizite" als auch abstrakte Methoden (welche zumindest erlauben, einige Aussagen über die Lösung zu treffen) vorgestellt.

---

<sup>1</sup>Beispielsweise besitzt  $u - \Delta u = f$  genau dann eine eindeutige Lösung  $u \in X$ , wenn  $f \in Y$ , d.h.  $(1 - \Delta) : X \rightarrow Y$  ist ein Isomorphismus.

## II. Die Methode der Charakteristiken

### II.1. Motivation anhand der Transportgleichung

Für  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  betrachten wir

$$\partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (\text{II.1})$$

$$u = g, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \quad (\text{II.2})$$

*Idee:* Finde Weg  $\mathbf{X}_{\mathbf{x}_0} : I \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+1}$  entlang dem sich  $u$  durch Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE) berechnen lässt. Um die Notation zu erleichtern setze im Folgenden  $\mathbf{X}_{\mathbf{x}_0}(s) = \mathbf{X}(s)$  und  $\partial_{n+1} = \partial_t$ . Weiter sei

$$z(s) = u(\mathbf{X}(s)), \quad \mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{X}(s)), \quad z(0) = g(\mathbf{x}_0).$$

Dann folgt mit der Kettenregel

$$\dot{z}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} (\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{p}(s) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s). \quad (\text{II.3})$$

Die Ableitung von  $\mathbf{p}(s)$  ergibt komponentenweise erneut mit der Kettenregel

$$(\dot{\mathbf{p}}^i)(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u \\ \partial_t \partial_i u \end{pmatrix} (\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Aus (II.1) folgt  $\partial_i \partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u = 0$  oder als Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} \partial_t \partial_i u \\ \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0.$$

Setze  $\dot{\mathbf{X}}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}$ , d.h.

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 + s\mathbf{b} \\ s \end{pmatrix}.$$

Somit gilt  $\dot{\mathbf{p}}^i(s) = 0$ . Mit

$$\mathbf{p}(0) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} (\mathbf{x}_0, 0)$$

## II. Die Methode der Charakteristiken

folgt  $\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}(\mathbf{x}_0, 0)$ . Gleichung (II.3) impliziert nun

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} u)(\mathbf{x}_0, 0) + (\partial_t u)(\mathbf{x}_0, 0) \stackrel{(II.1)}{=} 0 \\ z(0) &= g(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$u(\mathbf{x}_0, 0) \stackrel{(II.2)}{=} g(\mathbf{x}_0) = z(s) = u(\mathbf{X}(s)) = u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}s, s).$$

Mit  $\mathbf{x} := \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}s$  folgt also  $u(\mathbf{x}, s) = u(\mathbf{x} - \mathbf{b}s, 0) = g(\mathbf{x} - \mathbf{b}s)$ . Insgesamt erhalten wir

**Theorem II.1.** Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ . Dann löst

$$u(\mathbf{x}, s) = g(\mathbf{x} - \mathbf{b}s) \in C^k(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$$

die Transportgleichung (II.1).

**Bemerkung II.2.**  $u$  ist nicht glatter als  $g$ .

## II.2. Allgemeiner Fall

Betrachte nun beliebige PDE 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} F(Du(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \Gamma \end{aligned} \tag{II.4}$$

Hierbei ist  $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ ,  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben und glatt.

### II.2.1. Herleitung einer ODE für $z(s)$ , $\mathbf{p}(s)$ , $\mathbf{X}(s)$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} z(s) &= u(\mathbf{X}(s)) \\ \mathbf{p}(s) &= (\nabla u)(\mathbf{X}(s)) \end{aligned}$$

und berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= (\nabla u)(\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{p}(s) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) \\ \dot{\mathbf{p}}^i(s) &= (\nabla \partial_i u)(\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

*Ziel:* Elimiere Ableitungen 2. Ordnung. Aus (II.4) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \partial_{\mathbf{p}_j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \partial_i \partial_j u + \partial_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \partial_i u \\ + \partial_i F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Also setze

$$\dot{\mathbf{X}}^j(s) = \partial_{\mathbf{p}_j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)), \quad j = 1, \dots, n$$

Dann gilt

$$\dot{\mathbf{p}}^i(s) = -\partial_{\mathbf{p}_i} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \mathbf{p}^i(s) - \partial_i F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)), \quad i = 1, \dots, n$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(s) &= -\partial_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \mathbf{p}(s) - D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \cdot (\nabla_{\mathbf{p}} F)(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \\ \dot{\mathbf{X}}(s) &= (\nabla_{\mathbf{p}} F)(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Insbesondere erfüllt jede Lösung  $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$  von (II.4) das System (II.5) solange  $x(s) \in \Omega$ .

### II.2.2. OBdA Rand von $\Omega$ 'lokal flach'

Rand von  $\Omega$  flach bedeutet  $\Gamma \cong \mathbb{R}_+^n$ . In einer Umgebung  $U \subset \Gamma$  von  $x_0 \in \Gamma$  lässt sich  $\Gamma$  durch Schieben und Drehen in den Graph einer glatten 'kleinen' Funktion  $\phi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  überführt. Setze nun

$$\begin{aligned} v(y) &= u(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + \phi(y_1, \dots, y_{n-1})), \\ u(x) &= v(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, \dots, x_{n-1})), \\ \Phi(x) &= (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, \dots, x_{n-1})), \\ \Psi(x) &= (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \phi(x_1, \dots, x_{n-1})). \end{aligned}$$

Dann gilt wegen  $(\nabla u)(\mathbf{x}) = (\nabla v)(\mathbf{y})(\nabla \Phi)(\mathbf{x})$  die Gleichung

$$0 = F((\nabla u)(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = F((\nabla v)(\mathbf{y})(\nabla \Phi)(\mathbf{x}), v(\mathbf{y}), \Psi(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}),$$

d.h. für ein geeignetes  $G$  und  $\Omega_* \subset \Phi(\Omega)$ :

$$G(\nabla v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \Omega_*.$$

Außerdem  $v = h$  auf  $\Gamma_* \subset \Phi(\Gamma)$  mit  $h(\mathbf{y}) = g(\Psi(\mathbf{y}))$ , d.h. (II.4) ist lokal äquivalent zu

$$\begin{aligned} G(\nabla v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y}), \mathbf{y}) &= 0 \text{ in } \Omega_* \\ v &= h \text{ auf } \Gamma_* \end{aligned}$$

### II.2.3. Bestimmung der Anfangsdaten für $\Omega$ mit glatten Rand

Definiere  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}(0)$ ,  $z_0 = z(0) = g(\mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ . Wie in Section II.1 gilt dann

$$\begin{aligned} \partial_j u(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{p}_{0,j} = (\partial_j g)(\mathbf{x}_0), \quad j = 1, \dots, n-1, \\ F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) &= 0. \end{aligned}$$

## II. Die Methode der Charakteristiken

Insgesamt erhalten wir somit die Kompatibilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}(0) &= \mathbf{x}_0, \\
 z(0) &= z_0, \\
 \mathbf{p}_j(0) &= (\partial_j g)(\mathbf{x}_0), \quad j = 1, \dots, n-1 \\
 F(\mathbf{p}(0), z(0), \mathbf{X}(0)) &= 0.
 \end{aligned} \tag{II.6}$$

Der Punkt  $(\mathbf{x}_0, z_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  heißt *zulässig*, falls (II.6) erfüllt ist. Beachte, dass  $z_0$  durch die Wahl von  $\mathbf{x}_0$  festgelegt ist. Existenz und Eindeutigkeit von  $\mathbf{p}_0$  ist nicht klar.

### II.2.4. Nicht charakteristische Randdaten

In diesem Abschnitt wollen wir stets annehmen, dass  $(\mathbf{x}_0, z_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  zulässig ist. Wir wollen (II.6) jedoch nicht nur in  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ , sondern in einer Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  betrachten. Dies führt auf folgende Erweiterung von (II.6):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}(0) &= \mathbf{y}, \\
 \mathbf{p}(0) &= \mathbf{q}(\mathbf{y}), \\
 z(0) &= g(\mathbf{y}), \\
 \mathbf{q}_j(\mathbf{y}) &= (\partial_j g)(\mathbf{y}), \quad j = 1, \dots, n-1, \\
 F(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y}) &= 0, \quad \mathbf{y} \in U_{\mathbf{x}_0},
 \end{aligned} \tag{II.7}$$

wobei  $U_{\mathbf{x}_0}$  eine Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  in  $\Gamma$  ist.

**Lemma II.3.** *Sei  $F_{\mathbf{p}_n}(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \neq 0$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung  $q$  von (II.7) für  $\mathbf{y} \in \Gamma$  nahe bei  $x_0$ . In diesem Fall heißt  $(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0)$  nicht charakteristisch.*

**Beweis:.** *Definiere  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \times U_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) &= \mathbf{p}_i - \partial_i g(\mathbf{y}), \quad i = 1, \dots, n-1 \\
 \mathbf{G}_n(\mathbf{p}, \mathbf{y}) &= F(\mathbf{p}, g(\mathbf{y}), \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Dann folgt  $\mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x}_0) = 0$  und

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \partial_{\mathbf{p}_1} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) & \partial_{\mathbf{p}_2} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) & \cdots & \partial_{\mathbf{p}_{n-1}} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) & \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

*Insbesondere gilt also  $\det \mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x}_0) = \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \neq 0$ . Die Existenz von  $\mathbf{q}$  in einer Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  in  $\Gamma$  folgt aus dem Satz über implizite Funktionen mit  $\mathbf{G}(\mathbf{q}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$  und  $\mathbf{q}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}_0$ .*

**Bemerkung II.4.** *Falls  $\Gamma$  nicht flach  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$  ist, so ist  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$  nicht charakteristisch falls  $D_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \nu(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , wobei  $\nu$  die äußere Normale bezeichnet.*

### II.2.5. Lokale Lösungen

OBdA sei  $\Gamma$  in diesem Abschnitt flach. Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(s) &= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(y_1, \dots, y_{n-1}, s), \\ z(s) &= z(\mathbf{y}, s) = z(y_1, \dots, y_{n-1}, s), \\ \mathbf{X}(s) &= \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{X}(y_1, \dots, y_{n-1}, s).\end{aligned}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung von (II.5) mit Anfangsdaten (II.7) (Übungsaufgabe). Wie im Abschnitt II.1 müssen wir  $X$  invertieren.

**Lemma II.5.** *Sei  $(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0)$  nicht charakteristisch. Dann existiert ein offenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  um 0 und Umgebungen  $W \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$  von  $\mathbf{x}_0$  sowie  $V \subset \mathbb{R}^n$  von  $\mathbf{x}_0$ , sodass für alle  $\mathbf{x} \in V$  eindeutige  $s = S(\mathbf{x}) \in I$  und  $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \in W$  existieren mit  $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x}))$ . Die Abbildungen  $S$  und  $\mathbf{Y}$  sind  $C^2$ .*

**Beweis:.** *Es gilt  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{X}(\mathbf{y}, 0) = (\mathbf{y}, 0)$ . Weiter*

$$(\nabla \mathbf{X})(\mathbf{x}_0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{\mathbf{p}_1} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \partial_{\mathbf{p}_{n-1}} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0), \end{bmatrix}$$

*d.h.  $\det(\nabla \mathbf{X})(\mathbf{x}_0, 0) \neq 0$  nach Voraussetzung. Die Behauptung folgt nach dem Satz über die Umkehrabbildung.*

**Theorem II.6.** *Unter den Voraussetzungen von Lemma (II.5) setze  $u(\mathbf{x}) = z(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$ , wobei  $\mathbf{y}$ ,  $s$ ,  $\mathbf{p}$  und  $z$  wie oben definiert sind. Dann gilt*

$$\begin{aligned}F(\nabla u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in V, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \cap \Gamma.\end{aligned}$$

**Beweis:.** Schritt 1: Löse (II.5), (II.6).

*Die Existenz einer Lösung  $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)$ ,  $z(s) = z(\mathbf{y}, s)$ ,  $\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)$  von (II.5) und (II.6) folgt unmittelbar aus der Theorie für gewöhnliche DGL.*

Schritt 2: *Es gilt  $f(\mathbf{y}, s) = F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) = 0$  für  $\mathbf{y} \in W$  und  $s \in I$ .*

*Wegen  $\mathbf{p}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{q}(\mathbf{y})$ ,  $z(\mathbf{y}, 0) = g(\mathbf{y})$  folgt  $f(\mathbf{y}, 0) = 0$  für  $\mathbf{y} \in W$ . Weiter folgt mit (II.5) dann (Übungsaufgabe)*

$$\begin{aligned}\partial_s f(\mathbf{y}, s) &= D_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \partial_s \mathbf{p} + \nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \partial_s z + \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \partial_s \mathbf{X} \\ &= D_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) [-\nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{p} - \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X})] + D_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) = 0, \quad s \in I.\end{aligned}$$

## II. Die Methode der Charakteristiken

Schritt 3: Wir zeigen  $F(\mathbf{p}(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in V$ . Mit Schritt 2 folgt direkt:

$$F(\mathbf{p}(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = F(\mathbf{p}(\mathbf{Y}(\mathbf{x})), S(\mathbf{x})), z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})), \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) = 0.$$

Schritt 4: Wir zeigen  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in V$ . Zunächst zeige

$$\partial_s z(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s) \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial s}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \quad (\text{II.8})$$

$$\partial_{\mathbf{y}_j} z(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s) \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial \mathbf{y}_j}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_j} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \quad (\text{II.9})$$

Gleichung (II.8) folgt direkt aus (II.5).

Für (II.9) sei  $\mathbf{y} \in \Gamma$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  und setze

$$r_i(s) = \partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} r_i(0) &= \partial_i g - \mathbf{q}_i(\mathbf{y}) \stackrel{(\text{II.7})}{=} 0 \\ \dot{r}_i(s) &= \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s z(\mathbf{y}, s) - \partial_s \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Aus (II.8) folgt

$$\partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s z(\mathbf{y}, s) = (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_s \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s).$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot{r}_i(s) &= (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \partial_s \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \\ &\quad - \partial_s \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \\ &\stackrel{(\text{II.5})}{=} (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) - [-\nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \\ &\quad - \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)] \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \end{aligned}$$

Mit Schritt 2 folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\mathbf{y}_i} f(\mathbf{y}, s) = \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \\ &\quad + \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s) \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s), \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{r}_i(s) &= \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot [-\partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s)] + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \\ &= -\nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot r_i(s). \end{aligned}$$

Aus der Theorie von ODE folgt, dass  $r_i \equiv 0$ ,  $s \in I$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  eine Lösung von (II.10) ist, d.h. (II.9) gilt. Wir berechnen mit Hilfe von (II.8) und (II.9):

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}_j} u(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \partial_s z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot [\nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x})]. \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen:

$$\partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} \quad (\text{Kronecker-Delta})$$

Es gilt wegen  $\mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{X}_k \\ &= \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) + \nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt  $\partial_{\mathbf{x}_j} u(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s)$  und somit  $\nabla_{\mathbf{x}} u = \mathbf{p}$ .

**Beispiel II.7.** Wir betrachten eine lineare, homogene PDE, d.h.

$$F(\nabla u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla(u)(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}) \cdot u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{II.11})$$

Dann folgt mit

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= b(\mathbf{x}) \\ \nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= c(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= 0. \end{aligned}$$

und (II.5) (vgl. Übungen)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(s) &= -c(\mathbf{X}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \cdot b(\mathbf{X}(s)) = -c(\mathbf{X}(s)) \cdot z(s) \\ \dot{\mathbf{X}}(s) &= b(\mathbf{X}(s)). \end{aligned}$$

Annahme: Sei  $c \equiv 0$  und  $\dot{\mathbf{X}}(s) = b(\mathbf{X}(s))$  besitzt folgende Trajektorien:

INSERT PICTURE

Somit ist  $z \equiv \text{const}$  entlang jeder Trajektorie; aber beachte Kompatibilitätsbedingung an  $g$ , da die Funktionswerte am Rand vorgeschrieben sind.

Annahme: Sei  $c \equiv 0$  und  $\dot{\mathbf{X}}(s) = b(\mathbf{X}(s))$  besitzt folgende Trajektorien:

INSERT PICTURE

Lösung ist nur glatt, falls  $g$  konstant ist.

**Bemerkung II.8.** Insbesondere folgt aus obigem Beispiel, dass i.A. keine glatte Lösung existiert.

## II. Die Methode der Charakteristiken

### II.2.6. Schwache Formulierung

Wir betrachten die PDE

$$\begin{aligned}\partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) &= g & \text{in } \mathbb{R}\end{aligned}\tag{II.12}$$

Multiplikation mit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}_+})$  liefert:

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x F(u)) \cdot \varphi \\ &= - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi + \int_{\mathbb{R}} g \cdot \varphi(\cdot, 0)\end{aligned}\tag{II.13}$$

$\varphi$  heißt *Testfunktion*.

**Definition II.9.** Wir sagen, dass  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  eine *Integrallösung* von (II.12) ist, falls (II.13) für alle Testfunktionen  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}_+})$  gilt.

Wir betrachten folgende Situation:

INSERT PICTURE

Hierbei bezeichnet  $\nu$  die äußere Normale,  $u$  sei glatt in  $V_l$  und  $V_r$ .  $C$  heißt *Unstetigkeitskurve*, falls  $u$  in  $C$  nicht stetig ist (wovon wir im Folgenden ausgehen). Somit ergibt sich

$$0 = \int_{V_l} u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi = - \int_{V_l} (\partial_t u + \partial_x F(u)) \varphi, \quad \varphi \in C_c^\infty(V_l).$$

Es folgt (für  $V_r$  analog):

$$\begin{aligned}\partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 & \text{in } V_l \\ \partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 & \text{in } V_r.\end{aligned}\tag{II.14}$$

Weiter gilt für  $\varphi \in C_c^\infty(V)$ :

$$\begin{aligned}0 &= \int_V u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi \\ &= - \int_{V_l \cup V_r} (\partial_t u + \partial_x F(u)) \varphi + \int_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_l \\ F(u_l) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi - \int_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_r \\ F(u_r) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi \\ &\stackrel{(II.14)}{=} \int_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_l - u_r \\ F(u_l) - F(u_r) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi,\end{aligned}$$

wobei  $u_l$  der Grenzwert von links in  $C \cap V$  und  $u_r$  der Grenzwert von rechts ist.

Sei nun  $C$  gegeben durch  $\{(x, t) : x = S(t)\}$  für  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Dann gilt

$$F(u_l) - F(u_r) = \dot{S} \cdot (u_l - u_r),$$

wobei

$$\nu \stackrel{(\ddot{U}A)}{=} \frac{1}{1 + (\dot{S})^2} \begin{pmatrix} -\dot{S} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Notation

$$\begin{aligned} [[u]] &= u_l - u_r && \text{(Sprung in } u \text{ entlang } C) \\ [[F(u)]] &= F(u_l) - F(u_r) && \text{(Sprung in } F(u) \text{ entlang } C) \\ \sigma &= \dot{S} && \text{ („Geschwindigkeit“ von } C) \end{aligned}$$

lässt sich dies über

$$[[F(u)]] = \sigma \cdot [[u]] \tag{II.15}$$

entlang der Unstetigkeitskurve  $C$  ausdrücken. Gleichung (II.15) heißt *Rankine-Hugoniot-Bedingung*.

**Beispiel II.10** (*Burgersgleichung*). Setze

$$F(u) := \frac{u^2}{2}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 1 - x & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

und betrachte

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) &= 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g \text{ auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.16}$$

Die (projizierten) Charakteristiken haben die Form  $[\ddot{U}A] Y(s) = (g(x_0)s + x_0, s)$ , also ist die Lösung über

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x \leq t, 0 \leq t < 1, \\ \frac{1-x}{1-t} & t \leq x \leq 1, 0 \leq t < 1, \\ 0 & x \geq 1, 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

gegeben.

## II. Die Methode der Charakteristiken

Für  $t > 1$  kreuzen sich die Charakteristiken. Setze  $s(t) = \frac{1+t}{2}$  und

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x < s(t), t \geq 1, \\ 0 & x > s(t), t \geq 1. \end{cases}$$

Dann gilt entlang  $s$ :

$$F(u_l) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}, \quad F(u_r) = \frac{0^2}{2} = 0, \quad u_l = 1, \quad u_r = 0,$$

d.h.  $[[u]] = 1$ ,  $[[F(u)]] = \frac{1}{2}$ . Die Rankine-Hugoniot-Bedingung liefert also  $\sigma = \frac{1}{2} = \dot{s}$ .

Wir betrachten nun II.10 mit  $g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$

Dann ist sowohl

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & x < t/2, \\ 1 & x > t/2 \end{cases} \quad \text{als auch} \quad u_2(x, t) = \begin{cases} 1 & x > t, \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

eine Integrallösung von II.10 ([ÜA] Überprüfe Rankine-Hugoniot-Bedingung).

**Problem:** Eindeutigkeit.

Im Folgenden nehmen wir an, dass wir von einem Punkt in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  ausgehend entlang einer (projizierten) Charakteristik **rückwärts** keine andere Charakteristik treffen.

Sei nun  $C$  wieder eine Unstetigkeitskurve und  $P \in C$ , so dass  $P$  von den Charakteristiken  $Y_1$  und  $Y_2$  getroffen wird.

Dann gilt wegen  $Y_i(s) = (F'(g(x_i))s + x_i, s)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $x_1 < x_2$  für die Charakteristiken, dass

$$\begin{aligned} F'(u_l)s + x_1 = F'(u_r)s + x_2 &\Rightarrow (F'(u_l) - F'(u_r))s = x_2 - x_1 > 0 \\ \stackrel{[\dot{U}^A]}{\Rightarrow} F'(u_l) > \sigma > F'(u_r). \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Diese Ungleichung nennt man auch *Entropie-Bedingung*. Eine Unstetigkeitskurve nennt man *Schock* falls (II.17) und die Rankine-Hugonit-Bedingung erfüllt sind.

Sei nun  $F$  gleichmäßig konvex, d.h.  $F'' \geq \Theta > 0$  für ein  $\Theta > 0$ . Dann folgt wegen  $F'$  streng monoton wachsend, dass (II.17) zu  $u_l > u_r$  äquivalent ist. Insbesondere ist  $F'$  injektiv und surjektiv. Wir definieren

$$G := (F')^{-1}.$$

Dann ist eine Integrallösung von II.10 für  $g(x) = \begin{cases} u_l & x < 0, \\ u_r & x > 0 \end{cases}$  und  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \begin{cases} u_l & \frac{x}{t} < \sigma \\ u_r & \frac{x}{t} > \sigma \end{cases} \text{ mit } \sigma = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r} \quad \text{falls } u_l > u_r \\ \text{bzw. } u(x, t) &= \begin{cases} u_l & \frac{x}{t} < F'(u_l) \\ G(\frac{x}{t}) & F'(u_l) < \frac{x}{t} < F'(u_r) \\ u_r & \frac{x}{t} > F'(u_r) \end{cases} \quad \text{falls } u_l < u_r \end{aligned}$$

(ohne Beweis).

**Bemerkung II.11.**

(a) Im ersten Fall sind  $u_l$  und  $u_r$  durch einen Schock getrennt, im zweiten Fall durch eine Rarefaction Wave.

## II. Die Methode der Charakteristiken

- (b) Man kann zeigen, dass für  $F$  konvex und glatt höchstens eine Integrallösung existiert, welche zusätzlich

$$u(x+z, t) - u(x, t) \leq c\left(1 + \frac{1}{t}\right)z, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z, t > 0$$

für ein  $c > 0$  genügt. Insbesondere sind diese Lösungen eindeutig.

- (c) Die Existenz einer Integrallösung lässt sich mit Variationsrechnung zeigen, vgl. Lax-Oleinik-Formel ([Eva10, Abschnitt 3.4.2]).

### II.2.7. Inhomogenes Problem

Wir betrachten in diesem Abschnitt:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u &= f && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Wie in Abschnitt 1 setzen wir

$$z(s) = u(\mathbf{X}(s)), \quad \mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}(\mathbf{X}(s)), \quad \dot{\mathbf{X}}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt mit  $\partial_{n+1} = \partial_t$ , dass

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \dot{\mathbf{X}}(s), \\ (\dot{\mathbf{p}}^i)(s) &= \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u \\ \partial_t \partial_i u \end{pmatrix}(\mathbf{X}(s)) \cdot \mathbf{X}(s), \quad i = 1, \dots, n+1 \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix} = f(\mathbf{X}(s)). \end{aligned}$$

Integration der letzten Gleichung ergibt

$$z(t) - z(0) = \int_0^t f(\mathbf{X}(s)) ds = \int_0^t f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}s, s) ds,$$

d.h.  $u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}t, t) = \int_0^t f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}s, s) ds$ . Mit  $\mathbf{x} := \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}t$  folgt dann

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t f(\mathbf{x} + \mathbf{b}(s-t), s) ds. \quad (\text{II.19})$$

## II.3. Die Wellengleichung

### II.3.1. Der Fall $n = 1$

Wir betrachten zunächst

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Wegen  $(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = \partial_t^2 u - \partial_x^2 u$  lässt sich II.20 in

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x u &= v && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_t v + \partial_x v &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ v &= h - \partial_x g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

umschreiben. Mit Abschnitt 1 folgt nun ( $b = 1$ )

$$v(x, s) = h(x - s) - (\partial_x g)(x - s) =: a(x - s).$$

Mit Abschnitt 2.7 folgt analog ( $b = -1$ ,  $f(x, s) = v(x, s)$ )

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t v(x - (s - t), s) ds + g(x + t) \\ &= \int_0^t a(x + t - 2s) ds + g(x + t) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + g(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (\partial_x g)(y) dy + g(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy + \frac{1}{2} g(x + t) + \frac{1}{2} g(x - t) \end{aligned} \tag{II.21}$$

Dies ist *d'Alemberts Formel*. In  $(*)$  wurde die Substitution  $y = x + t - 2s$ ,  $dy = -2ds$  verwendet.

**Theorem II.12.** Sei  $g \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R})$  dann ist  $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$  definiert durch II.21 eine Lösung von II.20.

**Beweis:.** Nachrechnen.

Im nächsten Schritt betrachten wir

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u &= 0 && \text{auf } \{x = 0\} \times \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{II.22}$$

mit  $g(0) = h(0) = 0$ .

Idee: Erweitere  $u$ ,  $g$ ,  $h$  auf  $\mathbb{R}$ , d.h.

$$\tilde{g} = \begin{cases} g(x) & , x \geq 0 \\ -g(-x) & , x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{h} = \begin{cases} h(x) & , x \geq 0 \\ -h(-x) & , x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{u} = \begin{cases} u(x) & , x \geq 0 \\ -u(-x) & , x < 0 \end{cases}.$$

## II. Die Methode der Charakteristiken

Falls  $u$  Gleichung (II.22) löst, so löst  $\tilde{u}$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tilde{u} - \partial_x \tilde{u} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \tilde{u} &= \tilde{g} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ \partial_t \tilde{u} &= \tilde{h} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Nach (II.19) ist  $\tilde{u}$  über

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy$$

gegeben. Insbesondere folgt  $\tilde{u}(0, t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(t) + \tilde{g}(-t)) + \frac{1}{2} \int_{-t}^t \tilde{h}(y) dy = 0$  für  $t \geq 0$  und

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & , x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy & , 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

**Beachte:**  $u \notin \mathcal{C}^2$  falls  $g''(0) \neq 0$

### II.3.2. Der Fall $n = 3$

Wir setzen

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}, r, t) &:= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{\partial B(\mathbf{x}, r)} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}, t) \quad (\text{Mittelwert über } \partial B(\mathbf{x}, r)), \\ G(\mathbf{x}, r, t) &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} g(\mathbf{y}, t), \quad H(\mathbf{x}, r, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} h(\mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta_{\mathbf{x}} u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.23}$$

für  $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n), h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemma II.13.** ((Euler-Poisson-Darboux-Gleichung))

Sei  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  eine Lösung von (II.23). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U - \partial_r^2 U - \frac{n-1}{r} \partial_r U &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ U &= G && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \partial_t U &= H && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.24}$$

**Beweis:.** Mit

$$U(\mathbf{x}, r, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \stackrel{\ddot{U}^A}{=} \int_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, t) dS(\mathbf{z})$$

folgt

$$\begin{aligned} \partial_r U(\mathbf{x}, r, t) &= \int_{\partial B(0,1)} \mathbf{z}(\nabla u)(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, t) dS(\mathbf{z}) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} (\nabla u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \nu(\nabla u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \frac{1}{|\partial B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \operatorname{div}(\nabla u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{|B(\mathbf{x}, r)|}{|\partial B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} (\Delta u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \stackrel{\ddot{U}^A}{=} \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} (\Delta u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\partial_r^2 U(\mathbf{x}, r, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}). \quad (\text{II.25})$$

Damit folgt  $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  und

$$\begin{aligned} \lim_{r \searrow 0} \partial_r U(\mathbf{x}, r, t) &= 0, \\ \lim_{r \searrow 0} \partial_r^2 U(\mathbf{x}, r, t) &= \frac{1}{n} \Delta u(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Aus (II.23) ergibt sich dann

$$\partial_r U(\mathbf{x}, r, t) = \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y}, t) dy = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y}, t) dy,$$

wobei  $\alpha(n)$  das Ma\ss der Einheitskugel bezeichnet. Insbesondere erhalten wir

$$r^{n-1} \partial_r U(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y}, t) dy. \quad (\text{II.27})$$

## II. Die Methode der Charakteristiken

Mit den Gleichungen (II.27) und (II.25) folgt dann

$$\begin{aligned}
\partial_r(r^{n-1}\partial_r U(\mathbf{x}, r, t)) &= (n-1)r^{n-2}\partial_r U(\mathbf{x}, r, t) + r^{n-1}\partial_r^2 U(\mathbf{x}, r, t) \\
&= \frac{n-1}{n\alpha(n)} \frac{1}{r} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) + r^{n-1} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} (\Delta u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \\
&\quad + r^{n-1} \frac{1-n}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} (\Delta u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \\
&= r^{n-1} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) = r^{n-1} \partial_t^2 U,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt  $|B(\mathbf{x}, r)| = r^n \alpha(n)$  verwendet haben. Insgesamt folgt

$$(n-1)r^{n-2}\partial_r U(\mathbf{x}, r, t) + r^{n-1}\partial_r^2 U(\mathbf{x}, r, t) = r^{n-1}\partial_t^2 U$$

Teilt man beide Seiten der Gleichung durch  $r^{n-1}$ , so folgt die Behauptung.

Sei nun  $n = 3$ . Wir setzen  $\tilde{U} = rU$ ,  $\tilde{G} = rG$  und  $\tilde{H} = rH$ . Dann folgt mit (II.24)

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 \tilde{U} = r\partial_t^2 U &= r(\partial_r^2 U + \frac{2}{r}\partial_r U) = r\partial_r^2 U + 2\partial_r U = \partial_r(U + r\partial_r U) \\
&= \partial_r \partial_r \tilde{U} = \partial_r^2 \tilde{U}
\end{aligned}$$

und mit (II.26)

$$\partial_r^2 \tilde{G}(0) = 0 \cdot \partial_r^2 G(0) + 2\partial_r G(0) = 0,$$

d.h.  $\tilde{U}$  löst

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 \tilde{U} - \partial_r \tilde{U} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\
\tilde{U} &= \tilde{G} && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\
\partial_t \tilde{U} &= \tilde{H} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \\
\tilde{U} &= 0 && \text{auf } \{r=0\} \times \mathbb{R}_+
\end{aligned} \tag{II.28}$$

Mit Abschnitt II.3.1 folgt

$$\tilde{U}(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy$$

und

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}, t) &= \lim_{r \searrow 0} U(\mathbf{x}, r, t) = \lim_{r \searrow 0} \frac{\tilde{U}(\mathbf{x}, r, t)}{r} = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{2r} (\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2r} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \\
 &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) = \frac{\partial}{\partial t} (tG(t)) + tH(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} g \, ds \right) + t \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} h \, ds.
 \end{aligned} \tag{II.29}$$

Wie oben folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} g(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z}) = \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} z(\nabla g)(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z}) \\
 &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{t} (\nabla g)(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{z})
 \end{aligned}$$

Mit (II.29) löst  $u$ , definiert über

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} th(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y})$$

löst (II.23) Diese Formel heisst *Kirchhoff's Formel*

**Theorem II.14.** Sei  $n = 3$ ,  $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$ . Dann ist die Lösung von (II.23) über

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} th(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \tag{II.30}$$

gegeben.

**Bemerkung II.15.** Obiger Ansatz kann auf beliebige, ungerade Dimension übertragen werden.

### II.3.3. Der Fall $n = 2$

Leider ist keine Transformaion bekannt, welche die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung in eine eindimensionale Wellengleichung überführt. Wir setzen  $\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t)$ . Dann folgt nach Definition, dass  $\bar{u}$

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 \bar{u} - \partial_x \bar{u} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\
 \bar{u} &= \bar{g} && \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \\
 \partial_t \bar{u} &= \bar{h} && \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}
 \end{aligned}$$

## II. Die Methode der Charakteristiken

mit  $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$  und  $\bar{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)$  löst. Setzen wir  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, 0)$ , so ist  $\bar{u}$  nach Formel II.29 über

$$\bar{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} \right) + t \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{h} d\bar{S}$$

gegeben.

$$u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} \right) + t \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{h} d\bar{S}, \quad \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, 0)$$

Wegen

$$\int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} \stackrel{(\ddot{U}A)}{=} \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} g(\mathbf{y}) (1 + |D\gamma|^2)^{\frac{1}{2}} d\mathbf{y}$$

wobei  $\gamma(t) = (t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Mit  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, t)$  folgt  $(\nabla\gamma)(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{-\frac{1}{2}} 2(\mathbf{y} - \mathbf{x})$

$$1 + |D\gamma|^2 = 1 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}^2} = \frac{t}{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y} = \frac{t}{2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y}$$

Analog natürlich auch für  $h$ , sodass folgt:

$$\Rightarrow u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \partial_t \left( t^2 \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y} \right) + \frac{t^2}{2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{h(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} & \partial_t \left( t^2 \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y} \right) \\ &= \partial_t \left( t^2 \int_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(t^2 - t^2\mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{z} \right) \\ &= \partial_t \left( t \int_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(1 - \mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{z} \right) \\ &= \int_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(1 - \mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{z} + t \int_{B(0,1)} \frac{\mathbf{z}(\nabla g)(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(1 - \mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{z} \\ &\stackrel{\mathbf{y}=\mathbf{x}+t\mathbf{z}}{=} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(1 - (\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t})^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y} + t \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{(\nabla g)(\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{(1 - (\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t})^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{t} d\mathbf{y} \\ &= t \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})}{(1 - (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Also:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{t(g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})) + t^2 h(\mathbf{y})}{(t^2 - (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y}$$

Insgesamt:

**Theorem II.16.** Sei  $n = 2$ ,  $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Dann ist die Lösung von (II.20) über

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{t(g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})) + t^2 h(\mathbf{y})}{(t^2 - (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y}$$

gegeben.

**Bemerkung II.17.** Obiger Ansatz lässt sich auf beliebige gerade Dimensionen verallgemeinern.



### III. Harmonische Funktionen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . In diesem Abschnitt betrachten wir Lösungen der *Laplace-Gleichung*.

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{III.1}$$

für geeignetes  $g$ . Funktionen  $u \in C^2(\Omega)$ , welche  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  genügen heißen *harmonisch*.

#### III.1. Grundlagen

Folgende Grundlagen aus Analysis II werden eine wichtige Rolle spielen:

**Proposition III.1.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit gleichmäßigem  $C^1$ -Rand. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u = \int_{\partial\Omega} uv, \quad u \in C^1(\overline{\Omega})^n, u, \partial_j u \in L^1(\Omega)^n, j = 1, \dots, n$$

Hier bezeichnet  $\nu$  die äussere Normale.

**Beweis:** (ÜA)

**Korollar III.2.** *(Partielle Integration)*

*Unter den Voraussetzungen von (III.1) gilt*

$$\int_{\Omega} (\partial_i u)v + \int_{\Omega} u\partial_i v = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i; u, v \in C^1(\overline{\Omega}), v, \partial_i v, u, \partial_i u \in L^1(\Omega)$$

**Beweis:** Sei  $i \in 1, \dots, n$ . Definiere  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  über  $U = uv e_i$ . Dann folgt mit (III.1)

$$\int_{\Omega} (\partial_i u)v + \int_{\Omega} u\partial_i v = \int_{\Omega} \partial_i(uv) = \int_{\Omega} \operatorname{div} U = \int_{\partial\Omega} U\nu = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i$$

**Korollar III.3.** *(Green'sche Formeln)*

*Unter den Voraussetzungen von (III.1) gilt*

$$(a) \int_{\Omega} (\Delta u)v - u\Delta v = \int_{\partial\Omega} v\partial_{\nu}u - u\partial_{\nu}v$$

$$(b) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = - \int_{\Omega} \Delta v + \int_{\partial\Omega} u\partial_{\nu}v$$

$$(c) \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu}u$$

für  $u, v \in C^2(\overline{\Omega}) : v, \partial_i v, \partial_i \partial_j v, u, \partial_i u, \partial_i \partial_j u \in L^1(\Omega) \quad i = 1, \dots, n$

### III. Harmonische Funktionen

**Beweis:.** Mit

$$\operatorname{div}(\nabla u)v = \operatorname{div} \begin{pmatrix} (\partial_1 u)v \\ \vdots \\ (\partial_n u)v \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (\partial_i^2 u)v + \sum_{i=1}^n (\partial_i u)(\partial_i v) = (\Delta u)v + (\nabla u \nabla v)$$

folgt

$$\int_{\Omega} v \Delta u + \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} \operatorname{div}((\nabla u)v) = \int_{\partial \Omega} (\nabla u)v \nu = \int_{\partial \Omega} (\partial_{\nu} u)v \quad (\text{III.2})$$

Analog:

$$\int_{\Omega} u(\Delta v + (\nabla u \nabla v)) = \int_{\partial \Omega} u \partial_{\nu} v \quad (\text{III.3})$$

$\Rightarrow$  (a), (b)  
(c) (ÜA)

## III.2. Eigenschaften von harmonischen Funktionen

### III.2.1. Mittelwerteigenschaft

**Proposition III.4.** Sei  $u \in C^2(\Omega)$  harmonisch. Dann gilt

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u = \int_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u \quad (\text{III.4})$$

für  $\mathbf{x} \in \Omega$  und  $r > 0$  mit  $B(\mathbf{x},r) \subset \subset \Omega$ . (III.4) heißt Mittelwerteigenschaft auf  $\Omega$

**Beweis:.** Setze  $\Phi(r) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})$ . Dann gilt (vgl. Beweis von Lemma II.13)

$$\Phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} (\Delta u) = 0$$

Da  $u$  stetig ist, folgt  $\lim_{r \searrow 0} \Phi(r) = u(\mathbf{x})$ , d.h.

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})$$

Mit Kugelkoordinaten folgt weiter

$$\int_{B(\mathbf{x},r)} u = \int_0^r \left( \int_{\partial B(\mathbf{x},s)} u \right) ds = u(\mathbf{x}) \int_0^r n \alpha(n) s^{n-1} ds = u(\mathbf{x}) \alpha(n) s^n \Big|_0^r = \alpha(n) r^n u(\mathbf{x})$$

Wobei  $n \alpha(n) s^{n-1}$  dem Maß der Kugelschale und  $\alpha(n) r^n$  dem Maß der Kugel entspricht.

**Proposition III.5.** Sei  $u \in C^2(\Omega)$  mit

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u$$

für jede Kugel  $B(\mathbf{x},r) \subset\subset \Omega$ . Dann ist  $u$  harmonisch.

**Beweis:.** Annahme:  $(\Delta u) > 0$  für ein  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ .

Dann existiert ein  $r > 0$ :  $(\Delta u)(\mathbf{x}) > 0$  für  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x},r)$ . Nun gilt für  $\Phi$  wie im Beweis von (III.4) mit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ :

$$0 = \Phi'(r) = \int_{B(\mathbf{x}_0,r)} (\Delta u) > 0 \text{ Widerspruch!}$$

### III.2.2. Maximumsprinzip

In diesem Abschnitt sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  stets beschränkt.

**Theorem III.6.** Sei  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  harmonisch. Dann gilt

$$(a) \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u(\mathbf{x})$$

$$(b) \text{ falls } \mathbf{x}_0 \in \Omega \text{ mit } u(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u(\mathbf{x}) \text{ und } \Omega \text{ zusammenhängend} \\ \Rightarrow u \text{ ist konstant.}$$

**Beweis:.** Sei  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ :  $u(\mathbf{x}_0) = M =: \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u(\mathbf{x})$ . Dann folgt mit (III.4)

$$M = u(\mathbf{x}_0) = \int_{B(\mathbf{x}_0,r)} u \leq M$$

Gleichheit gilt genau dann wenn  $u \equiv M$  in  $B(\mathbf{x}_0,r)$ . Damit ist die Menge  $M = \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) = M\}$  offen und relativ abgeschlossen in  $\Omega$ . Insbesondere  $M \equiv \Omega$  falls  $\Omega$  zusammenhängend.

(a) folgt aus (b) (ÜA)

**Bemerkung III.7.**

(a) Analog zu (III.6) lässt sich ein Minimumsprinzip beweisen. (ÜA)

(b) Betrachte eine Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  von (III.1) für  $\Omega$  zusammenhängend und  $g \geq 0$ . Dann folgt  $u > 0$  in  $\Omega$  falls  $g \neq 0$

**Theorem III.8. (Eindeutigkeit)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt. Sei  $g \in C(\partial\Omega)$ ,  $\rho \in C(\Omega)$ . Dann existiert höchstens eine Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \rho \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{III.5}$$

**Beweis:.** Seien  $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  Lösungen von III.5. Dann gilt

$$\begin{aligned} -\Delta(u_1 - u_2) &= 0 \text{ in } \Omega, \\ u_1 - u_2 &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit dem Maximums- und Minimumsprinzip folgt  $u_1 - u_2 = 0$ .

### III.3. Regularität

**Theorem III.9.**  $u \in C^2(\Omega)$  besitze die Mittelwertseigenschaft auf  $\Omega$ .  $\Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$ .

**Beweis:.** Sei  $\eta_\epsilon$  ein radialsymmetrischer Mollifier. Setze  $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$  in  $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) > \epsilon\}$ .  $\Rightarrow u^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned} u^\epsilon(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \eta_\epsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{B(\mathbf{x}, \epsilon)} \eta_\epsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \int_0^\epsilon \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \eta_\epsilon(r)u(r, \cdot) dS dr = \int_0^\epsilon \eta_\epsilon \int_{\partial B(x, r)} (r)u(r, \cdot) dS dr \\ &= \int_0^\epsilon \eta_\epsilon |\partial B(x, r)| u(x) dr = \int_{B(x, \epsilon)} \eta_\epsilon(|x - y|) dy u(x) \\ &= u(x), \quad x \in \Omega_\epsilon, \end{aligned}$$

d.h.  $u \in C^\infty(\Omega)$ . Dabei haben wir im vierten Schritt verwendet, dass  $\eta_\epsilon$  radialsymmetrisch und somit konstant auf der Kugelschale ist. Außerdem erlaubt die Mittelwertseigenschaft von  $u$  den sechsten Schritt.

**Bemerkung III.10.** Theorem III.9 sagt nichts über das Verhalten von  $u$  am Rand aus.

### III.4. Lokale Abschätzungen für harmonische Funktionen

**Theorem III.11.** Sei  $u$  harmonisch in  $\Omega$ . Dann gilt

$$|(\nabla^\alpha)(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))} \quad (\text{III.6})$$

für jede Kugel  $B(\mathbf{x}_0, r) \subset\subset \Omega$  und jeden Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| = k$ . Hier ist

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_k = \frac{(2^{n-1}nk)^k}{\alpha(n)}.$$

**Beweis:.** via Induktion.

Fall  $k = 0$  folgt aus MWE (ÜA).

Fall  $k = 1$ : (Beachte  $\partial_i u$  ist harmonisch.) Mit der Mittelwerteigenschaft und Korollar III.2 folgt dann

$$|\partial_i u(\mathbf{x}_0)| = \left| \int_{B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2})} \partial_i u \right| = \left| \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2})} uv_i \right| \leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2}))}.$$

Hierbei haben wir in letzten Schritt  $|\partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2})| = \frac{r\alpha(n)}{2^n}$  verwendet. Wegen  $x \in \partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2})$  folgt  $B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2}) \subseteq B(\mathbf{x}_0, r) \subseteq \Omega$ .

$$\Rightarrow |u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))}.$$

$$\Rightarrow |\partial_i u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{2n}{r\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))} = \frac{n}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^{n+1} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))}.$$

Die Behauptung gelte nun für  $k-1$ . Dann gilt für  $\alpha$  mit  $|\alpha| = k$ , dass  $D^\alpha u = \partial_i D^\beta u$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $\beta$  mit  $|\beta| = k-1$ . Wie oben gilt

$$|\nabla^\alpha u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{k}))}$$

und für  $x \in \partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{k})$  gilt  $B(\mathbf{x}, \frac{k-1}{k}r) \subseteq B(\mathbf{x}_0, r) \subseteq \Omega$ . Wie oben folgt mit (ÜA)

$$\left| (D^\beta u)(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n) \left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))},$$

$$|(\nabla^\alpha u)(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))}.$$

### III.5. Liouville

**Theorem III.12.** Sei  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch und beschränkt. Dann ist  $u$  konstant.

**Beweis:.** Sei  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ . Dann folgt mit Satz III.11

$$|(\nabla u)(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))} \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \alpha(n)r^n \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{C}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

d.h.  $|(\nabla u)(\mathbf{x}_0)| = 0$  folgt für  $r \rightarrow \infty$ . Dann ist  $u$  konstant.

### III.6. Analytische versus harmonische Funktionen

**Theorem III.13.** Sei  $u$  harmonisch in  $\Omega$ , d.h. für alle  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  existiert ein  $x > 0$ , sodass

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n}{n!} (D^\alpha u)(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r).$$

**Beweis:.** Beweisidee: Zeige mithilfe von III.11, dass die Taylorreihe konvergiert. (ÜA)

### III.7. Harnack-Ungleichung

**Theorem III.14.** Sei  $V \subset\subset \Omega$  zusammenhängend. Dann existiert ein  $C > 0$ , welches nur von  $V$  abhängt, sodass

$$\sup_{\mathbf{x} \in V} u(\mathbf{x}) \leq C \inf_{\mathbf{x} \in V} u(\mathbf{x})$$

für alle nicht-negativen harmonischen Funktionen  $u \in C^2(\Omega)$  gilt. Insbesondere ist für alle  $x, y \in V$  erfüllt:

$$\frac{1}{C} \cdot u(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x}) \leq C \cdot u(\mathbf{y}).$$

**Beweis:.** Sei  $r := \frac{1}{4} \text{dist}(V, \partial\Omega)$ . Wähle  $x, y \in V$  mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq r$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &\stackrel{MWE}{=} \int_{B(\mathbf{x}, 2r)} u(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \geq \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(\mathbf{y}, r)} u(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} = \frac{1}{2^n} \int_{B(\mathbf{y}, r)} u(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \stackrel{MWE}{=} \frac{1}{2^n} u(\mathbf{y}). \\ &\Rightarrow 2^n u(\mathbf{y}) \geq u(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2^n} u(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r. \end{aligned}$$

Überdecke  $\bar{V}$  mit endlich vielen Kugeln mit Radius  $\frac{r}{2}$ . ( $V \subset\subset \Omega$ ) und  $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$  für  $i = 2, \dots, N$ . Dann folgt  $u(x) \geq \frac{1}{2^{nN}} u(y)$  für alle  $x, y \in V$ .

In den folgenden Abschnitten werden wir eine Darstellung der Lösung der *Poisson-Gleichung*

$$\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n \tag{III.7}$$

der Form  $u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = (k * f)(\mathbf{x})$  mit einer geeigneten Funktion  $k$  herleiten. Die Funktion  $k$  heißt *Fundamentallösung*. Im nächsten Abschnitt diskutieren wir zunächst einige benötigte Resultate aus der Distributionentheorie.

# IV. Einführung in die Distributionentheorie

## IV.1. Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$

In diesem Kapitel sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  stets offen. Wir setzen

$$D(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \text{ ist kompakt}\} = C_c^\infty(\Omega).$$

Eine Funktion  $\varphi \in D(\Omega)$  heiße Testfunktion.

**Beispiel IV.1.**  $\varphi$  definiert über

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|\mathbf{x}\|^2}}, & \|\mathbf{x}\| < 1, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| \geq 1, \end{cases}$$

ist eine Testfunktion mit  $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ .

**Definition & Lemma IV.2.** Sei  $(\varphi_j) \in D(\Omega)$  und  $\varphi \in D(\Omega)$ . Dann ist  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = \varphi$  in  $D(\Omega) : \Leftrightarrow$

- (i)  $\exists K \Subset \Omega$  mit  $\text{supp } \varphi_j \subset K$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,
- (ii)  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|D^\alpha(\varphi_j - \varphi)\| = 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .

**Theorem IV.3.** Seien  $(\varphi_j), (\psi_j) \subset D(\Omega)$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = \varphi$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = \psi$  für  $\varphi, \psi \in D(\Omega)$ . Dann gilt

- (a)  $\lim_{j \rightarrow \infty} (\alpha\varphi_j + \beta\psi_j) = \alpha\varphi + \beta\psi$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .
- (b)  $\lim_{j \rightarrow \infty} \nabla^\alpha \varphi_j = \nabla^\alpha \varphi$ , für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , d.h.  $\nabla^\alpha : D(\Omega) \rightarrow D(\Omega)$  ist stetig.

**Definition & Lemma IV.4.** Setze  $D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} : T \text{ linear und stetig}\}$ , wobei

$$T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig} : \Leftrightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = \varphi \text{ in } D(\Omega) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} T\varphi_j = T\varphi.$$

Wir schreiben

$$\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi).$$

$T \in D'(\Omega)$  heißt Distribution.

#### IV. Einführung in die Distributionentheorie

**Theorem IV.5.** Sei  $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  linear. Dann sind äquivalent:

- (a)  $T \in D'(\Omega)$ ,
- (b)  $\forall K \Subset \Omega \exists C > 0, N(K, T) : |T\varphi| \leq C \cdot \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty, \varphi \in D(\Omega)$   
 mit  $\text{supp } \varphi_N \subset K$ .

**Beweis:** (a)  $\Rightarrow$  (b):

*Annahme: Die Behauptung ist falsch. Dann existiert  $K \Subset \Omega$  so, dass für alle  $N \in \mathbb{N}$  ein  $\varphi_N \in D(\Omega)$  mit*

$$\text{supp } \varphi_N \subset K \text{ und } |T\varphi_N| > N \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi_N\|_\infty$$

*existiert. Setze  $\phi_N = \varphi_N / |T\varphi_N|$ . Dann gilt  $\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N = 0$ , aber  $|T\phi_N| = \frac{T\varphi_N}{|T\varphi_N|} = 1$ , was einen Widerspruch zur Stetigkeit darstellt.*

(b)  $\Rightarrow$  (a): (ÜA).

**Bemerkung IV.6.** In der Situation von Satz IV.5 heißt  $T$  von der Ordnung  $N$  auf  $K$ . Fall  $T$  von der Ordnung  $N$  ist für alle  $K \subset \Omega$  kompakt, so heißt  $T$  von der Ordnung  $N$  auf  $\Omega$ .

**Beispiel IV.7. (a)** Die Dirac'sche  $\delta_a$ -Distribution. Für  $a \in \Omega$  setze  $\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a)$ ,  $\varphi \in D(\Omega)$ . Falls  $0 \in \Omega$  schreiben wir  $\delta_0 = \delta$ .

(b) Der Cauchy-Hauptwert.

Sei  $\Omega = \mathbb{R}$ . Wir setzen

$$\left\langle (pv)\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Beachte:  $\frac{1}{x} \notin L_{loc}(\mathbb{R})$ .

(c) Sei  $\Omega = \mathbb{R}$ .  $\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\epsilon} \varphi(x) dx$ .

(d) Für  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  ist  $T_f : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  definiert über

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

**Beweis:** (b) Sei  $(\varphi_j) \subset D(\Omega)$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = 0$ . Dann existiert ein  $a > 0$ , sodass  $\text{supp } \varphi \subseteq [-a, a]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Es gilt nun

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \varphi_j(0) \int_{\epsilon \leq |x| \leq a} \frac{1}{x} dx + \int_{\epsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx \right]$$

## IV.2. Elementare Operationen mit Distributionen

$$\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^0 \|\varphi'_j\|_{\infty} dx = 2a \|\varphi'_j\|_{\infty} \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

(d) Sei  $(\varphi_j) \subset D(\Omega)$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = 0$  in  $D(\Omega)$ . Dann existiert ein  $K \subset \Omega$  kompakt mit  $\text{supp } \varphi_j \subset K$ ,  $j \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{\infty} = 0$ . Weiter gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\langle T_f, \varphi_j \rangle| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int_K f \varphi_j dx \right| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{\infty} \int_K f dx = 0.$$

(a), (c) (ÜA).

**Theorem IV.8.** Es gilt  $T_f = 0$  in  $D'(\Omega)$  genau dann, wenn  $f \equiv 0$  fast überall.

**Beweis:.** Die Rückrichtung ist klar.

' $\Rightarrow$ ': Sei  $T_f = 0$  in  $D'(\Omega)$ . Dann gilt für  $K \subset \subset \Omega$ , dass  $\int_K f \varphi dx = 0$ ,  $\varphi \in C_c^{\infty}(K)$ . Da  $f \in D'(K)$  folgt  $f \equiv 0$  fast überall (ÜA).

## IV.2. Elementare Operationen mit Distributionen

### IV.2.1. Multiplikation mit einer Funktion

Sei  $a \in C^{\infty}(\Omega)$ ,  $T \in D'(\Omega)$ . Wir definieren  $\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle$ ,  $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ .

**Beispiel IV.9. (a)** Sei  $a \in C^{\infty}(\Omega)$  mit  $0 \in \Omega$ . Dann gilt  $a\delta = a(0)\delta$ , denn

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = \langle a(0)\delta, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\Omega).$$

**(b)** Es gilt  $xpv(\frac{1}{x}) = T_{\mathbb{1}}$ , denn

$$\left\langle xpv\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle pv\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{1}{x} x \varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1} \varphi = \langle T_{\mathbb{1}}, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

### IV.2.2. Ableitung der Distribution

Nach Satz IV.3 (b) ist  $\nabla^{\alpha} : D(\Omega) \rightarrow D(\Omega)$  stetig. Wir definieren für  $T \in D'(\Omega)$  und  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,

$$\langle \nabla^{\alpha} T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \nabla^{\alpha} \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\Omega). \quad (\text{IV.1})$$

**Bemerkung IV.10. (a)** Sei  $f \in C^{\infty}(\Omega)$ . Dann gilt für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , dass

$$\langle \nabla^{\alpha} T_f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, \nabla^{\alpha} \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f \nabla^{\alpha} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (\nabla^{\alpha} f) \varphi = \langle T_{\nabla^{\alpha} f}, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\Omega).$$

**(b)**  $\nabla^{\alpha} \in \mathcal{L}(D'(\Omega))$  für  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , da  $\nabla^{\alpha}$  linear und stetig ist. (ÜA)

IV. Einführung in die Distributionentheorie

(c) Leibnitz-Regel

Sei  $a \in C^\infty(\Omega)$ ,  $T \in D'(\Omega)$ . Dann gilt für  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , dass  $aT \in D'(\Omega)$  und

$$\nabla^\alpha(aT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\nabla^\beta a)(\nabla^{\alpha-\beta} T).$$

(d) Sei  $f \in W^{k,p}(\Omega)$ . Dann gilt  $\nabla^\alpha T_f = T_{\nabla^\alpha f}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $|\alpha| \leq k$ .

**Beispiel IV.11. (a)** Die Heaviside-Funktion

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ist ein Element aus  $D'(\mathbb{R})$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = -\varphi(x)|_0^\infty \\ &= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(b) Sei  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ . Dann gilt

$$\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha \varphi)(0), \quad \varphi \in D(\Omega).$$

(c)  $(\log(|x|))' = \text{pv}(\frac{1}{x})$ , denn

$$\begin{aligned} \langle (\ln(|x|))', \varphi \rangle &= -\langle \ln(|x|), \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln(|x|) \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(|x|) \varphi'(x) dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \ln(|x|) \varphi'(x) dx \right) \\ &\stackrel{PI}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} -\frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi'(-\epsilon) \ln(\epsilon) + \varphi'(\epsilon) \ln(\epsilon) \right) \\ &\stackrel{MWS}{=} \lim_{\eta \in (-\epsilon, \epsilon)} \left\langle \text{pv}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln(\epsilon) 2\epsilon \varphi''(\eta)] = \left\langle \text{pv}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle, \quad \varphi \in D(\Omega). \end{aligned}$$

### IV.2.3. Der adjungierte Operator

Sei  $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  und  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle AT, \varphi \rangle &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha T, \varphi \right\rangle \stackrel{\text{IV.1}}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle T, a_\alpha D^\alpha \varphi \rangle = \left\langle T, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \varphi \right\rangle \\ &= \langle T, A^* \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

$A^* := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  heißt der zu  $A$  *adjungierte Operator*.

**Beispiel IV.12.**  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ . Dann gilt  $\Delta = \Delta^*$ .

### IV.3. Faltung

Für  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  sei  $(\tau_{\mathbf{a}}\varphi)(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ . Wir definieren die Translation von  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \tau_{\mathbf{a}}T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-\mathbf{a}}\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Weiter sei  $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(-\mathbf{x})$  für  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann heißt

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Spiegelung.

**Definition IV.13.** Sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Wir definieren die Faltung  $T * \varphi$  via

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle.$$

Für  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  und  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt (ÜA)

$$(f * g)(x) = T_f(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}g).$$

**Beispiel IV.14.** *Es gilt*

$$(\delta * \varphi)(\mathbf{x}) = \langle \delta, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle = (\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi)(0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

*d.h.*  $\delta * \varphi = \varphi$ .

**Theorem IV.15.** *Sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt  $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\partial_j(T * \varphi) = (\partial_j T) * \varphi = T * (\partial_j \varphi), j = 1, \dots, n$ .*

#### IV. Einführung in die Distributionentheorie

**Beweis:.** Schritt 1:  $T * \varphi$  ist stetig

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi(\mathbf{y}) - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere folgt:

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi = \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \text{ d.h.}$$

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi \rangle = \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle.$$

Also

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} (T * \varphi)(\mathbf{x}') = (T * \varphi)(\mathbf{x}).$$

Schritt 2:

Sei  $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Dann gilt für  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ :

$$\frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = \frac{1}{h}[\varphi(\mathbf{x} + he_i - \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y})], \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), i = 1, \dots, n.$$

Also:

$$\begin{aligned} \partial_i(T * \varphi)(\mathbf{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \langle T, \frac{1}{h}\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle \\ &= \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) \rangle \\ &= (T * (\partial_i\varphi))(\mathbf{x}), i = 1, \dots, n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_i(T * \varphi)(\mathbf{x}) = (T * \partial_i\varphi)(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

$$\Rightarrow \partial_i(T * \varphi) \text{ stetig in } \mathbb{R}^n.$$

$$\Rightarrow T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Schritt 3:

Wegen

$$\partial_{\mathbf{y}_i}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_{\mathbf{x}_i}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n$$

folgt

$$\partial_{\mathbf{x}_i}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = -\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_{\mathbf{x}_i}\varphi) \quad i = 1, \dots, n$$

und damit

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}_i}(T * \varphi)(\mathbf{x}) &= (T * \partial_i\varphi)(\mathbf{x}) = \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) \rangle = -\langle T, \partial_{\mathbf{x}_i}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) \rangle \\ &= \langle \partial_i T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle = ((\partial_i T) * \varphi)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

## IV.4. Fundamentallösung

Sei  $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  ein Differentialoperator mit konstanten  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  und  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  mit  $AT = \delta$ . Dann gilt für  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ :

$$u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

ist eine Lösung im Sinne von Distributionen, da

$$Au = A(T * f) = (AT * f) = (\delta * f) = f.$$

**Definition IV.16.** Sei  $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ . Eine Distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  mit  $AT = \delta$  heißt *Fundamentallösung* von  $A$  in  $\mathbb{R}^n$ .



## V. Fundamentallösungen

In diesem Abschnitt berechnen wir einige Fundamentallösungen explizit. Im Allgemeinen kann man allerdings nicht erwarten, dass eine Fundamentallösung explizit berechnet werden kann.

**Theorem V.1** (Laplace-Operator). Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  setze

$$N(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)} |\mathbf{x}|^{2-n} & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x}| & n = 2 \\ \frac{1}{2} |\mathbf{x}| & n = 1 \end{cases}$$

Dann ist  $N \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  und es gilt

$$\Delta N = \delta \text{ (i. S. v. Distributionen).}$$

**Beweis:.** Sei  $n \geq 3$ . Für  $\epsilon > 0$  setze

$$N^\epsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{2-n}{2}}.$$

Dann gilt:  $N^\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und

$$\begin{aligned} \partial_j N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{2-n}{2}-1} \frac{2-n}{2} 2\mathbf{x}_j = \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}} \mathbf{x}_j \\ \partial_j^2 N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{n}{2} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} 2\mathbf{x}_j \mathbf{x}_j + \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}} \\ &= \frac{-1}{\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} \mathbf{x}_j^2 + \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}} \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} [-n\mathbf{x}_j^2 + (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)], \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Mit Lebesgue folgt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle N - N^\epsilon, \Delta \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Weiter gilt

$$\langle N^\epsilon, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} N^\epsilon \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta N^\epsilon) \varphi, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

## V. Fundamentallösungen

und

$$\begin{aligned}\Delta N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \partial_i^2 N^\epsilon(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon)^{\frac{-n}{2}-1} [-n|\mathbf{x}|^2 + n|\mathbf{x}|^2 + n\epsilon^2] \\ &= \frac{1}{\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} \epsilon^2 =: \rho^\epsilon(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1}{\epsilon^n} \rho^1\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{\alpha(n)} \left(\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}\right)^2 + 1\right)^{\frac{-n}{2}-1} = \frac{1}{\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} \epsilon^2 = \rho^\epsilon(x)$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \rho^1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\alpha(n)} (|\mathbf{y}|^2 + 1)^{\frac{-n}{2}-1} \, d\mathbf{y} = \int_0^\infty n \frac{r^{n-1}}{(r^2 + 1)^{\frac{n}{2}+1}} \, dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty n \frac{s^{\frac{n-2}{2}}}{(s+1)^{\frac{n}{2}+1}} \, ds = \frac{n}{2} \beta\left(\frac{n}{2}, 1\right) = \frac{n}{2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = 1\end{aligned}$$

ist  $f^\epsilon$  ist ein Mollifier. Daraus folgt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon(-\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Fall  $n=1,2$  (ÜA).

**Theorem V.2.** (Wellengleichung) Sei  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert über

$$E(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t > |x| \\ 0 & t \leq |x| \end{cases}.$$

Dann ist  $E \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  und es gilt

$$\partial_t^2 E - \partial_x^2 E = \delta.$$

**Beweis..** (ÜA)

## VI. Greenfunktionen

In diesem Abschnitt sei  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  stets offen und beschränkt mit  $\partial\Omega \in C^1$ . Wir betrachten

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{in } \Omega, \\ u &= g, & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{VI.1}$$

### VI.1. Herleitung der Greenfunktion

Sei  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  beliebig und seien  $\mathbf{x} \in \Omega$  und  $\epsilon > 0$  so, dass  $B(\mathbf{x}, \epsilon) \subset \Omega$ . Weiter sei  $N$  die Fundamentallösung des  $\Delta$  und  $V_\epsilon := \Omega \setminus B(\mathbf{x}, \epsilon)$ . Mit der Green'schen Formel folgt:

$$\int_{V_\epsilon} u(\mathbf{y})(\Delta N)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - N(\mathbf{y} - \mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \tag{VI.2}$$

$$= \int_{\partial V_\epsilon} u(\mathbf{y})\partial_\nu N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - N(\mathbf{y} - \mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \tag{VI.3}$$

wobei  $\nu$  die äußere Einheitsnormale auf  $\partial V_\epsilon$  ist.

Wegen  $\Delta N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$  für  $x \neq y$  ergibt sich mit der Darstellung der Fundamentallösung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} N(\mathbf{y} - \mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right| &\leq c\epsilon^{n-1} \max_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} |N| \\ &\leq c\epsilon^{n-1} \begin{cases} \epsilon^{2-n} & n \geq 3 \\ |\log \epsilon| & n = 2 \\ |\epsilon| & n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

## VI. Greenfunktionen

Weiterhin gilt  $\nabla N(\mathbf{y}) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n}$  für  $y \neq 0$  (Ü.A.) und es folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} u(\mathbf{y}) \partial_\nu N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, dS(\mathbf{y}) &= - \int_{\partial B(0, \epsilon)} u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \nu \cdot \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n} \, dS(\mathbf{y}) \\
 &= \int_{\partial B(0, \epsilon)} u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \cdot \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n} \, dS(\mathbf{y}) \\
 &= \int_{\partial B(0, \epsilon)} u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{y}|^{n-1}} \, dS(\mathbf{y}) \\
 &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0, \epsilon)} u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\
 &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Damit können wir in (VI.2) zum Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  übergehen und erhalten:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \partial_\nu N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, dS(\mathbf{y}) - \int_{\Omega} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) \, dy. \quad (\text{VI.4})$$

Gleichung (VI.4) erlaubt uns  $u$  zu bestimmen, falls wir  $\Delta u$  in  $\Omega$  und  $u, \partial_\nu u$  auf  $\partial\Omega$  kennen. Leider gibt uns (VI.1) keine Informationen über  $\partial_\nu u$  auf  $\partial\Omega$ . Wir würden allerdings unsere PDE überbestimmen, wenn wir die Werte von  $\partial_\nu u$  auf  $\partial\Omega$  zusätzlich vorschreiben würden. Daher gehen wir folgender Idee nach:

**Idee.** Finde für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  eine Funktion  $N^\mathbf{x} = N^\mathbf{x}(\mathbf{y})$  mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
 \Delta N^\mathbf{x} &= 0, & \text{in } \Omega, \\
 N^\mathbf{x} &= N(\mathbf{y} - \mathbf{x}), & \text{auf } \partial\Omega.
 \end{aligned}$$

Angenommen wir haben eine solche Funktion bereits gefunden. Mit den Greenschen Formeln folgt dann

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \partial_\nu N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) - N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\
 &= \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \partial_\nu N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) - N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y})
 \end{aligned}$$

und damit erhalten wir aus (VI.4) die Darstellung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \partial_\nu N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, dS(\mathbf{y}) - \int_{\Omega} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) + \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \partial_\nu N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) + \int_{\Omega} N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= - \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \partial_\nu (N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - N^\mathbf{x}(\mathbf{y})) \, dS(\mathbf{y}) - \int_{\Omega} (N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - N^\mathbf{x}(\mathbf{y})) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

welche den ungeliebten Term  $\partial_\nu u$  nicht mehr enthält. Diese führt uns zur Definition der Greenfunktion.

**Definition VI.1.** Die Funktion  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - N^\mathbf{x}(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , heißt *Greenfunktion in  $\Omega$* . Setzen wir die Definition von  $G$  in obige Darstellung von  $u$  ein, so sehen wir, dass in diesem Fall ist die Lösung von (VI.1) durch

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{y}) \partial_\nu G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{VI.5})$$

gegeben ist.

**Bemerkung VI.2.** Sei  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Dann erfüllt  $G_\mathbf{x}(\mathbf{y}) := G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  die Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta G_\mathbf{x} &= \delta_\mathbf{x}, & \text{in } \Omega, \\ G_\mathbf{x} &= 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Beweis:..** Ü.A.

## VI.2. Eigenschaften der Greenfunktion

**Theorem VI.3.** Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  mit  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  gilt  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

**Beweis:..** Wir schreiben  $G_\mathbf{x}(\mathbf{z}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  und  $G_\mathbf{y}(\mathbf{z}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  für  $\mathbf{z} \in \Omega$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta G_\mathbf{x} &= 0, & z \neq x, \\ \Delta G_\mathbf{y} &= 0, & z \neq y, \\ G_\mathbf{x}(\mathbf{z}) &= G_\mathbf{y}(\mathbf{z}) = 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Setze  $V = \Omega \setminus \{B(\mathbf{x}, \epsilon) \cup B(\mathbf{y}, \epsilon)\}$  für  $\epsilon > 0$  klein genug. Mit den Greenschen Formeln und obigen Eigenschaften von  $G_\mathbf{x}$  und  $G_\mathbf{y}$  folgt:

$$\int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} (\partial_\nu G_\mathbf{x}) G_\mathbf{y} - (\partial_\nu G_\mathbf{y}) G_\mathbf{x} \, dS(\mathbf{z}) = \int_{\partial B(\mathbf{y}, \epsilon)} (\partial_\nu G_\mathbf{y}) G_\mathbf{x} - (\partial_\nu G_\mathbf{x}) G_\mathbf{y} \, dS(\mathbf{z}).$$

## VI. Greenfunktionen

Da  $G_{\mathbf{y}}$  glatt nahe bei  $\mathbf{x}$  ist, gilt analog zu Abschnitt VI.1.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} (\partial_{\nu} G_{\mathbf{y}}) G_{\mathbf{x}} \, dS(\mathbf{z}) \right| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} c \epsilon^{n-1} \sup_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} |G_{\mathbf{x}}| = 0$$

und da  $G_{\mathbf{x}} = N(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - N^{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$  mit  $N^{\mathbf{x}}$  glatt in  $\Omega$  gilt, erhalten wir mit der aus Abschnitt VI.1 bekannten Rechnung:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} (\partial_{\nu} G_{\mathbf{x}}) G_{\mathbf{y}} \, dS(\mathbf{z}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} \partial_{\nu} N(\mathbf{x} - \mathbf{z}) G_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}).$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} (\partial_{\nu} G_{\mathbf{x}}) G_{\mathbf{y}} - (\partial_{\nu} G_{\mathbf{y}}) G_{\mathbf{x}} \, dS(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

und völlig analog natürlich auch

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{y}, \epsilon)} (\partial_{\nu} G_{\mathbf{y}}) G_{\mathbf{x}} - (\partial_{\nu} G_{\mathbf{x}}) G_{\mathbf{y}} \, dS(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Erinnern wir uns jetzt noch daran, dass nach dem ersten Schritt des Beweis beide Linsen gleich sind, folgt wie gewünscht  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

### VI.3. Die Greenfunktion im Halbraum

In diesem Abschnitt bezeichne  $N$  wieder die Fundamentallösung von  $\Delta$  in  $\mathbb{R}^n$ . Wie in Abschnitt VI.1 gezeigt, müssen wir für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$  eine Funktion  $N^{\mathbf{x}} = N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$  mit

$$\begin{aligned} \Delta N^{\mathbf{x}} &= 0, & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ N^{\mathbf{x}} &= N(\mathbf{y} - \mathbf{x}), & \text{auf } \partial \mathbb{R}_+^n, \end{aligned}$$

bestimmen, um die Greenfunktion im Halbraum angeben zu können.

**Idee (Reflexion).** Setze  $N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = N(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$ , wobei  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$  die Spiegelung von  $x$  an  $\partial \mathbb{R}_+^n$  ist.

Wegen  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+^n$  gilt damit  $\Delta N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Delta_{\mathbf{y}} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$  für  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$  und nach Definition gilt  $N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = N(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = N(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  für  $\mathbf{y} \in \partial \mathbb{R}_+^n$ . Diese Beobachtung liefert uns unmittelbar

**Theorem VI.4.** Die Greenfunktion in  $\mathbb{R}_+^n$  ist  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = N(\mathbf{y} - \mathbf{y}) - N(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$  mit  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ .

**Beweis:.** *Ü.A.*

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ u &= g, & \text{auf } \partial\mathbb{R}_+^n. \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

Eine direkte Rechnung zeigt zunächst:

$$\partial_{y_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_{y_n} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \partial_{y_n} N(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \left[ \frac{y_n - x_n}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|^n} \right].$$

Damit folgt

$$\partial_\nu G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\partial_{y_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}, \quad \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n,$$

und Formel (VI.5) liefert eine Darstellung der Lösung  $u$  von (VI.6) :

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n. \quad (\text{VI.7})$$

Die Funktion  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}$  definiert für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$  heißt *Poissonkern*. Es gilt nun

**Theorem VI.5.** *Sei  $g \in BC(\mathbb{R}^{n-1})$  und  $u$  durch (VI.7) gegeben. Dann gilt*

- (a)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ .
- (b)  $\Delta u = 0$  in  $\mathbb{R}_+^n$ .
- (c)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0)$  für  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^n$ .

**Beweis:.** *Wir unterteilen den Beweis in 3 Schritte.*

Schritt 1: Sei  $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$  fest. Dann ist  $\mathbf{y} \mapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  harmonisch für  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ . Wegen Satz VI.3 gilt  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , so dass für  $\mathbf{y} \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$  die Abbildung  $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  harmonisch für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{y}\}$ . Insbesondere ist  $\mathbf{x} \mapsto K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\partial_{y_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  harmonisch für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$ .

Schritt 2: Es gilt (*Ü.A. für Freunde des Rechnens*):

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1.$$

Insbesondere erhalten wir für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$  die Abschätzung

$$|u(\mathbf{x})| = \left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)} \|K(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(\partial\mathbb{R}_+^n)} = \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)}.$$

## VI. Greenfunktionen

Dies liefert uns  $\|u\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)} \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)}$ . Da  $\mathbf{x} \mapsto K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  harmonisch für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$  folgt  $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  (Ü.A.). Daher gilt

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \Delta_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n.$$

Es bleibt also nur noch (c) zu zeigen.

Schritt 3: Sei  $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$  und  $\epsilon > 0$ . Wähle  $\delta > 0$  derart, dass für alle  $|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$  für  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$  mit  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| \leq \delta$  gilt. Damit folgt:

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| &= \left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)] \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)] \, d\mathbf{y} \right| \\ &\quad + \left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)] \, d\mathbf{y} \right| \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Nach Wahl von  $\delta$  gilt

$$I_1 \leq \epsilon \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \epsilon.$$

Den zweiten Term schätzen wir für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$  mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$  durch

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2 \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &\leq 2 \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)} \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)} \frac{2^n}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|^n} \, d\mathbf{y} = cx_n \end{aligned}$$

ab, wobei wir genutzt haben, dass für  $\mathbf{x}$  wie oben und  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)$  nach umgekehrter Dreiecksungleichung  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq \frac{1}{2} |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|$  gilt. Für  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  folgt somit  $I_1 + I_2 \rightarrow 0$  und wir haben auch (c) nachgewiesen.

## VII. Allgemeinere Differentialoperatoren

In diesem Abschnitt stellen wir einige allgemeine Resultate über Fundamentallösungen dar. Ihre Beweise würden allerdings den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.

**Theorem VII.1.** (Malgrange-Ehrenpreis, siehe [Ehr54], [Ehr55], [Mal54], [Mal56]) Sei  $A = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha D^\alpha$  ein Differentialoperator mit  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann existiert eine Fundamentallösung für  $A$ .

**Beweis:** ohne Beweis.

Betrachte einen Differentialoperator  $L$  der Form

$$Lu = \partial_t u - A(t, x, \nabla_x u)u$$

mit  $A(t, x, \nabla_x u) = \sum_{|k|=2m} a_k(t, x) \nabla_x^k + \sum_{|k| < 2m} a_k(t, x) \nabla_x^k$ ,  $a_k \in C^{l+\alpha, (2+\alpha)2m}(Q)$ , wobei  $Q = [0, T_0] \times \bar{\Omega}$ , für ein  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit  $\partial\Omega \in C^{2m+l+\alpha}$ . Wir betrachten für  $\tau \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, \mathbf{x}) - A(t, \mathbf{x}, \nabla_x u)u(t, \mathbf{x}) &= f(t, \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > \tau, \\ u(t, \mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > \tau, \\ u(\tau, \mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \tag{VII.1}$$

**Definition VII.2.** (a) Sei  $A$  wie oben. Dann heißt  $A$  gleichmäßig *elliptisch*, falls  $\sum_{|k|=2m} a_k(t, \mathbf{x}) \xi_{k_1} \dots \xi_{k_n} \geq \alpha_0 |\xi|^{2m}$  mit  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $t \in [0, T_0]$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  für ein  $\alpha_0 > 0$ .

(b) Sei  $L$  wie oben. Dann heißt  $L$  (gleichmäßig) *parabolisch* falls  $A$  gleichmäßig elliptisch ist.

Die Greenfunktion von (VII.1) erfüllt dann über

$$\begin{aligned} \partial_t G(t, \mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\xi}) - A(t, \mathbf{x}, \nabla_x u)G(t, \mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\xi}) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > \tau, \\ u(t, \mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > \tau, \\ u(\tau, \mathbf{x}) &= \delta_{\boldsymbol{\xi}}, & \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

definiert. Falls  $G$  existiert und schön genug ist, ist die Lösung  $u$  von (VII.1) durch

$$u(t, x) := \int_0^t \int_{\Omega} G(t, \mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\xi}) f(\tau, \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \, d\tau + \int_{\Omega} G(t, \mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\xi}) u(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}, \quad t > \tau, \quad x \in \Omega,$$

gegeben.

## VII. Allgemeiner Differentialoperatoren

**Theorem VII.3** ([ÈdI70]). *Sei  $L$  gleichmäßig parabolisch. Dann existiert eine Greenfunktion  $G : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  von Problem (VII.1). Dann existieren  $C, c > 0$ :*

$$\left| \partial_t^{k_0} \nabla_{\mathbf{x}}^k G(t, \mathbf{x}, \tau, \xi) \right| \leq C (t - \tau)^{-\frac{n+2mk_0+|k|}{2m}} e^{-c \left( \frac{|\mathbf{x}-\xi|^{2m}}{|t-\tau|} \right)^{\frac{1}{q}}},$$

$$2mk_0 + |k| < 2m + l, \quad (t, \mathbf{x}), (\tau, \xi) \in Q,$$

$$\left| \partial_t^{k_0} \nabla_{\mathbf{x}}^l G(t, \mathbf{x}, \tau, \xi) - \partial_t^{k_0} \nabla_{\mathbf{x}}^l G(t, \mathbf{x}_0, \tau, \xi) \right| \leq C |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha (t - \tau)^{-\frac{n+2mk_0+l+\alpha}{2m}} e^{-c \left( \frac{|\mathbf{x}^* - \xi|^{2m}}{|t-\tau|} \right)^{\frac{1}{q}}},$$

$$(t, \mathbf{x}), (\tau, \xi), (t, \mathbf{x}_0) \in Q \in Q,$$

Hier:  $|\mathbf{x}^* - \xi| = \min\{|\mathbf{x} - \xi|, |\mathbf{x}_0 - \xi|\}$ ,  $q = 2m - 1$ .

**Beweis:** Ohne Beweis.

**Beispiel VII.4.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit  $\partial\Omega \in C^\infty$  und  $A = \Delta$ . Dann gilt*

$$\left| \partial_t^{k_0} \nabla_{\mathbf{x}}^k G(t, \mathbf{x}, \tau, \xi) \right| \leq C (t - \tau)^{-\frac{n+|k|}{2} - k_0} e^{-c \frac{|\mathbf{x}-\xi|^2}{|t-\tau|}}, \quad (t, \mathbf{x}), (\tau, \xi) \in Q.$$

**Beweis:** ÜA

**Theorem VII.5** ([ÈdI70]). *Sei  $A$  gleichmäßig elliptisch und unabhängig von  $t$ . dann genügt die Greenfunktion  $G_\lambda$  von*

$$\begin{aligned} (\lambda - A)u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

der Abschätzung

$$\left| \nabla_{\mathbf{x}}^k G_\lambda(\mathbf{x}, \xi) \right| \leq C e^{-l_0(\operatorname{Re}\lambda - B)\frac{1}{2m}|\mathbf{x}-\xi|} \begin{cases} 1 & \text{falls } n + |k| < 2m, \\ 1 + |\log |\mathbf{x} - \xi|| & \text{falls } n + |k| = 2m, \\ |\mathbf{x} - \xi|^{n-|k|+2m} & \text{falls } n + |k| > 2m, \end{cases}$$

für  $l_0, B > 0$  und  $\operatorname{Re}\lambda > B$ .

**Beweis:** ohne Beweis

## VIII. Temperierte Distributionen

In diesem Abschnitt definieren wir die Fouriertransformation auf den temperierte Distributionen  $S'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$ .

### VIII.1. Der Raum der schnell-fallenden Funktionen

Wir setzen

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

$S$  heißt *Raum der schnell-fallenden Funktionen*. Im Folgenden setzen wir

$$\|f\|_m = \sup_{\{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m\}} \|f\|_{\alpha,\beta}.$$

**Definition VIII.1.**  $(f_j) \subset S(\mathbb{R}^n)$  konvergiert gegen  $f$  in  $S(\mathbb{R}^n)$  genau dann wenn  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_m = 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}_0$ .

**Bemerkung VIII.2.** (a)  $S$  ist ein Fréchetraum.

(b)  $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ .

(c)  $\mathbf{x} \mapsto e^{-|\mathbf{x}|^2} \in S(\mathbb{R}^n) \setminus D(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:..** ÜA

Die Fouriertransformation ist auf  $S$  über

$$(\mathcal{F}u)(\boldsymbol{\xi}) := \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

definiert.

**Theorem VIII.3.** (a)  $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n))$ .

(b)  $\widehat{(\nabla^\alpha u)}(\boldsymbol{\xi}) = (i\boldsymbol{\xi})^\alpha \hat{u}(\boldsymbol{\xi})$  für  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .

(c)  $\widehat{(-i\mathbf{x})^\alpha u}(\boldsymbol{\xi}) = (\nabla^\alpha \hat{u})(\boldsymbol{\xi})$ .

(d)  $\mathcal{F} : S \rightarrow S$  ist ein Isomorphismus und

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(\boldsymbol{\xi}) = \check{u}(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^n \hat{u}(-\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n.$$

## VIII. Temperierte Distributionen

(e) Für  $f, g \in S$  gilt  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ .

(f) Für  $f, g \in S$  gilt  $\widehat{fg} = (\frac{1}{2\pi})^n \widehat{f} * \widehat{g}$ .

(g) Für  $f, g \in S$  gilt  $\int_{\mathbb{R}^n} f \overline{g} = (\frac{1}{2\pi})^n \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \overline{\widehat{g}}$ .

**Beweis:** siehe Funktionalanalysis, ÜA.

### VIII.2. Temperierte Distributionen

Wir definieren den Raum der temperierten Distributionen über  $S'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(S, \mathbb{C})$ .

**Theorem VIII.4.** Sei  $T : S \rightarrow \mathbb{C}$  linear. Dann sind äquivalent:

(a)  $T \in S'(\mathbb{R}^n)$

(b) Es existiert  $m \in \mathbb{N}_0, C > 0$  :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_m, \quad \varphi \in S.$$

**Beweis:**  $\Rightarrow$ : Annahme: Die Behauptung ist falsch. Dann existiert für alle  $m \in \mathbb{N}$  ein  $\varphi_m$  mit  $\|\varphi_m\| \leq 1/m$  und  $|\langle T, \varphi_m \rangle| = 1$ . Es gilt  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m = 0$  in  $S(\mathbb{R}^n)$ , aber  $\lim_{m \rightarrow \infty} |\langle T, \varphi_m \rangle| = 1$ . Das ist ein Widerspruch zu (a).

$\Leftarrow$ : klar (Betrachte Nullfolge).

**Definition VIII.5.** Seien  $T_j, T \in S'(\mathbb{R}^n), j \in \mathbb{N}$ . Wir sagen  $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T$  in  $S'$  wenn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

**Theorem VIII.6.** Sei  $p \in [1, \infty]$ . Dann gilt:

$$D(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$$

**Beweis:**  $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$  : klar

$D(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} S(\mathbb{R}^n)$  : ÜA

$S(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$  : Für  $p \in [1, \infty)$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|)^{n+1}} (f(\mathbf{x})(1 + |\mathbf{x}|)^{(n+1)/p})^p dx \\ &\leq \|f\|_{n+1}^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|)^{n+1}} dx, \leq C \|f\|_{n+1}^p, \quad f \in S. \end{aligned}$$

$p = \infty$  klar.

Weiter gilt  $L^p'(\mathbb{R}^n) = (L^p(\mathbb{R}^n))' \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$  für  $p \in [1, \infty)$ , Der Fall  $p = \infty$  lässt sich durch Nachrechnen zeigen.

Wegen  $D(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} S(\mathbb{R}^n)$  folgt  $S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$ .

**Beispiel VIII.7.** (a)  $\delta \in S'(\mathbb{R}^n)$ .

(b)  $x \mapsto e^x \in D'(\mathbb{R}^n) \setminus S'(\mathbb{R}^n)$ .

(c) Sei  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$  mit  $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{x}|)^{-1} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ .  
Dann ist  $T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$ , wobei wir  $\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi$  setzen.

**Beweis:.** ÜA.

**Definition VIII.8.** (a) Seien  $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ ,  $p$  Polynom. Wir definieren  $D^\alpha T, pT, \psi T$  über

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha T, \varphi \rangle &:= (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle && , \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \\ \langle pT, \varphi \rangle &:= \langle T, p\varphi \rangle && , \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \\ \langle \psi T, \varphi \rangle &:= \langle T, \psi\varphi \rangle && , \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

Dann sind  $D^\alpha T, pT, \psi T \in S'(\mathbb{R}^n)$ .

(b) Sei  $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ . Wir definieren  $\hat{T}$  (oder auch  $\mathcal{F}T$ ) als

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

**Theorem VIII.9.** Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  ist ein (stetiger) Isomorphismus auf  $S'(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt

$$\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle \quad T \in S'(\mathbb{R}^n), \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

und weiter  $\mathcal{F}^{-1}T = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}\tilde{T}$ .

**Beweis:.** Da  $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \mapsto S(\mathbb{R}^n)$  und  $T : S(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$  stetig sind, ist auch  $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \mapsto S'(\mathbb{R}^n)$  stetig, denn mit  $T_n \rightarrow T$  in  $S'(\mathbb{R}^n)$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{T}_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \hat{\varphi} \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{T}, \varphi \rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Also  $\hat{T}_n \rightarrow \hat{T}$  in  $S'(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ . Dann folgt mit VIII.3

$$\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

d.h.  $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = Id_{S'(\mathbb{R}^n)}$ . Analog gilt  $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = Id_{S'(\mathbb{R}^n)}$ . Weiter gilt

$$\langle \hat{\hat{T}}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\hat{\varphi}} \rangle = \langle T, (2\pi)^{-n} \tilde{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \tilde{T}, \varphi \rangle.$$

**Theorem VIII.10.** Sei  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt

$$\langle \hat{T}_f, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} f(\boldsymbol{\xi}) e^{-\epsilon|\boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi}, \varphi \right\rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

### VIII. Temperierte Distributionen

**Beweis:.** *Es gilt*

$$\langle \hat{T}_{fe^{-\epsilon|\cdot|}}, \varphi \rangle = \langle T_{fe^{-\epsilon|\cdot|}}, \hat{\varphi} \rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

*Mit Lebesgue folgt (Majorante ist  $|f\hat{\varphi}| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ):*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-\epsilon|\mathbf{x}|} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

*Damit folgt nun*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \hat{T}_{fe^{-\epsilon|\cdot|}}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle T_{fe^{-\epsilon|\cdot|}}, \hat{\varphi} \rangle = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{T}_f, \varphi \rangle \quad , \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

## IX. Fundamentallösung und Fouriertransformation

Sei  $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\phi$  eine zugehörige Fundamentallösung. Dann folgt mit VIII.3

$$1 = \hat{\delta} = \widehat{A\phi} = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha}_{:= \hat{A}} \hat{\phi},$$

d.h. formal " $\hat{\phi} = \hat{A}^{-1}$ ". Weiter gilt  $Au = f$ , da  $\hat{u} = \widehat{\phi * f} = \hat{\phi} \cdot \hat{f} = \hat{A}^{-1} \hat{f}$ .

**Beispiel IX.1.** Sei  $A = \Delta$ . Dann gilt  $\hat{A} = -|\xi|^2$ , d.h.  $\hat{N}(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Es lässt sich also folgende Vorgehensweise ableiten:

- ① Wende die Fouriertransformation auf die Gleichung an
- ② Löse Gleichung im Fourierbild
- ③ Anwenden der inversen Fouriertransformation liefert die Fundamentallösung.

**Theorem IX.2.** Die Fundamentallösung von

$$\begin{aligned} \partial_t K(t, \mathbf{x}) - \Delta_{\mathbf{x}} K(t, \mathbf{x}) &= 0 & , t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ K(0) &= \delta \end{aligned}$$

ist  $K(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}$ ,  $t > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**Beweis:.** Fouriertransformation in  $\mathbf{x}$  liefert

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{K}(t, \xi) - |\xi|^2 \hat{K}(t, \xi) &= 0 & , t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n \\ \hat{K}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Nachrechnen zeigt  $\hat{K}(t, \xi) = e^{-|\xi|^2 t}$ .  $\widehat{\partial_t K(t, \mathbf{x})} = \partial_t \hat{K}(t, \xi)$  und die Rücktransformation ist ÜA.

Sei  $\lambda \in \sum_{\Theta}$  für ein  $\Theta \in (0, \pi)$ ,  $n \geq 3$ . Wir betrachten nun

$$\lambda N_\lambda - \Delta N = \delta.$$

## IX. Fundamentallösung und Fouriertransformation

Die Fouriertransformation liefert

$$\lambda \hat{N}_\lambda - |\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{N}_\lambda = 1$$

Folglich gilt  $\hat{N}_\lambda = \frac{1}{\lambda + |\boldsymbol{\xi}|^2} = \frac{1}{|\lambda| e^{i \arg(\lambda)} + |\boldsymbol{\xi}|^2} = \frac{1}{|\lambda|} \hat{N} \left( \frac{|\boldsymbol{\xi}|}{\sqrt{|\lambda|}} \right)$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ , wobei

$$\hat{N} \left( \frac{|\boldsymbol{\xi}|}{\sqrt{|\lambda|}} \right) = \frac{1}{e^{i \arg(\lambda)} + \left( \frac{|\boldsymbol{\xi}|}{\sqrt{|\lambda|}} \right)^2}.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{N} \left( \frac{\cdot}{\sqrt{|\lambda|}} \right) \right), \varphi \rangle &= \langle N \left( \frac{\cdot}{\sqrt{|\lambda|}} \right), \mathcal{F}^{-1} \varphi \rangle \\ &\stackrel{\text{ÜA.}}{=} (\sqrt{|\lambda|})^n \langle N, \mathcal{F}^{-1} \varphi(\sqrt{|\lambda|} \cdot) \rangle \\ &\stackrel{\text{ÜA.}}{=} \langle N, \mathcal{F}^{-1} \left( \varphi \left( \frac{\cdot}{\sqrt{|\lambda|}} \right) \right) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}^{-1} N, \varphi \left( \frac{\cdot}{\sqrt{|\lambda|}} \right) \rangle \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \quad (\text{IX.1})$$

Daher genügt es,  $\mathcal{F}^{-1} N$  zu bestimmen.

**Theorem IX.3.** Sei  $n \geq 3$  und  $\Theta \in (0, \pi)$ . Dann existieren  $C, c > 0$  mit

$$|N_\lambda(\mathbf{x})| \leq C e^{-c_1 \sqrt{|\lambda|} |\mathbf{x}|} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \Sigma_\Theta.$$

**Beweis:.** Nach Theorem VIII.10 genügt es für  $\epsilon > 0$  und  $e^{i\theta}$ ,  $|\theta| < \Theta$

$$\check{N}^\epsilon(\mathbf{x}) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle}}{e^{i\theta} + |\boldsymbol{\xi}|^2} e^{-\epsilon |\boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi}$$

zu berechnen und dann  $\epsilon$  gegen 0 gehen zu lassen.

Schritt 1: Sei  $R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  eine Rotation, d.h.  $R^T = R^{-1}$  und  $\det(R) = 1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \check{N}^\epsilon(R\mathbf{x}) &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle R\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle}}{e^{i\theta} + |\boldsymbol{\xi}|^2} e^{-\epsilon |\boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi} = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle \mathbf{x}, R^T \boldsymbol{\xi} \rangle}}{e^{i\theta} + |\boldsymbol{\xi}|^2} e^{-\epsilon |\boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi} \\ &\stackrel{\boldsymbol{\eta} = R^T \boldsymbol{\xi}}{=} (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta} \rangle}}{e^{i\theta} + |R^{-T} \boldsymbol{\eta}|^2} e^{-\epsilon |R^{-T} \boldsymbol{\eta}|} d\boldsymbol{\eta} \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta} \rangle}}{e^{i\theta} + |\boldsymbol{\eta}|^2} e^{-\epsilon |\boldsymbol{\eta}|} d\boldsymbol{\eta} = \check{N}^\epsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Daher lässt sich o.B.d.A.  $\mathbf{x} = (x_1, 0, \dots, 0)$  annehmen mit  $x_1 > 0$ .  
Schritt 2: Kugelkoordinaten in  $(\xi_2, \dots, \xi_n)$ .

$$\begin{aligned} \tilde{N}^\epsilon(\mathbf{x}) &= c \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \frac{e^{ix_1 \xi_1}}{e^{i\theta} + \xi_1^2 + r^2} e^{-\epsilon \sqrt{(\xi_1^2 + r^2)}} r^{n-2} dr d\xi_1 \\ &\stackrel{\xi_1 = (1+r)\eta}{=} c \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \frac{e^{ix_1(1+r)\eta}}{e^{i\theta} + ((1+r)\eta)^2 + r^2} e^{-\epsilon \sqrt{((1+r)\eta)^2 + r^2}} \frac{r^{n-2}}{1+r} dr d\eta \end{aligned}$$

Schritt 3: Cauchy-Integralsatz  
 Es gilt:

①  $z \mapsto e^{ix_1(1+r)z}$  ist holomorph auf  $\mathbb{C}$  und

$$|e^{ix_1(1+r)z}| \leq e^{-x_1(1+r)\operatorname{Im}(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

②  $z \mapsto e^{-\epsilon(1+r)\sqrt{z^2 + \frac{r^2}{(1+r)^2}}}$  ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}\}$  und

$$|e^{-\epsilon(1+r)\sqrt{z^2 + \frac{r^2}{(1+r)^2}}}| \leq C, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}\}.$$

Weiter ist  $z \mapsto e^{-\epsilon(1+r)\sqrt{z^2 + \frac{r^2}{(1+r)^2}}}$  für  $r > 0$  holomorph in einer Umgebung um 0.

③  $e^{i\theta} + ((1+r)z)^2 + r^2 = 0 \iff z^2 = -\frac{e^{i\theta} + r^2}{(1+r)^2} \iff z_\pm(r) = \pm i \sqrt{\frac{e^{i\theta} + r^2}{(1+r)^2}}$ . Weiter gilt (ÜA)

$$0 < C(\Theta) \leq \left| \frac{e^{i\theta} + r^2}{(1+r)^2} \right| \leq 1, \quad \left| \arg \frac{e^{i\theta} + r^2}{(1+r)^2} \right| \leq \Theta, \quad \left| \arg \sqrt{\frac{e^{i\theta} + r^2}{(1+r)^2}} \right| \leq \frac{\Theta}{2}$$

Insbesondere folgt also  $\frac{\pi - \Theta}{2} \leq \left| \arg z_\pm(r) \right| \leq \frac{\pi + \Theta}{2}$  und  $\sqrt{C(\Theta)} \leq |z_\pm(r)| \leq 1$ .  
 Weiter gilt

$$\left| \frac{1}{e^{i\theta} (1+r)z^2 + r^2} \right| \leq \left| \frac{1}{(z - z_+(r))(z - z_-(r))} \right| \leq \frac{c}{|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}, |z| > 2.$$

Für  $r > 0$  setze

$$\Gamma_r := \{z \in \mathbb{C} : z = t + i\kappa(\theta)|t|, t \in \mathbb{R}\}$$

## IX. Fundamentallösung und Fouriertransformation

mit  $\kappa(\theta) > 0$  klein genug. Dann folgt mit dem Integralsatz von Cauchy, dass für  $r > 0$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix_1(1+r)\eta}}{e^{i\theta} + ((1+r)\eta)^2 + r^2} e^{-\epsilon\sqrt{((1+r)\eta)^2 + r^2}} \frac{r^{n-2}}{1+r} d\eta \\ &= \int_{\Gamma_r} \frac{e^{ix_1(1+r)z}}{e^{i\theta} + ((1+r)z)^2 + r^2} e^{-\epsilon\sqrt{((1+r)z)^2 + r^2}} \frac{r^{n-2}}{1+r} dz. \end{aligned}$$

Der Satz von Lebesgue liefert nun

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{ix_1(1+r)z}}{e^{i\theta} + ((1+r)z)^2 + r^2} e^{-\epsilon\sqrt{((1+r)z)^2 + r^2}} \frac{r^{n-2}}{1+r} dz \\ = \int_{\Gamma_r} \frac{e^{ix_1(1+r)z}}{e^{i\theta} + ((1+r)z)^2 + r^2} \frac{r^{n-2}}{1+r} dz. \end{aligned}$$

Eine weitere Anwendung des Integralsatzes von Cauchy liefert schließlich

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{ix_1(1+r)z}}{e^{i\theta} + ((1+r)z)^2 + r^2} \frac{r^{n-2}}{1+r} dz = \frac{e^{ix_1(1+r)z_+} r^{n-2}}{z_+ - z_-} \frac{1}{1+r}$$

wobei  $\gamma_r$  einen geeigneten geschlossenen Weg um  $z_+$  bezeichnet.

Schritt 4:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \check{N}^\epsilon(\mathbf{x}) \right| &= c \int_0^\infty e^{-cx_1(1+r)} r^{n-3} dr = ce^{-cx_1} \int_0^\infty e^{-cx_1 r} r^{n-3} dr \\ &\stackrel{s=x_1 r}{=} ce^{-cx_1} \int_0^\infty e^{-cs} s^{n-3} x_1^{3-n} \frac{1}{x_1} ds \\ &= \frac{e^{-cx_1}}{x_1^{n-2}} \int_0^\infty e^{-cs} s^{n-3} ds \leq c \frac{e^{-cx_1}}{x_1^{n-2}}. \end{aligned}$$

Mit einer Gleichung wie (IX.1) für  $N^\epsilon$  folgt dann (ÜA)

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N_\lambda^\epsilon(\mathbf{x}) \right| &\leq \frac{c}{|\lambda|} e^{-c_1\sqrt{|\lambda||\mathbf{x}|}} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}} \frac{1}{|\lambda|^{(n-2)/2}} \sqrt{|\lambda|}^n \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ &\leq ce^{-c_1\sqrt{|\lambda||\mathbf{x}|}} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}}. \end{aligned}$$

# X. Fouriermultiplikatoren

**Definition X.1.** Sei  $1 \leq p \leq \infty$  und  $m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$  eine beschränkte, messbare Funktion. Dann gilt:

$$T_m f = \mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F} f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

für  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ .  $m$  heißt *Symbol*. Die Funktion  $m$  heißt *Fouriermultiplikator* falls

$$\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

In diesem Fall kann  $T_m$  zu einem stetigen Operator auf  $L^p(\mathbb{R}^n)$  fortgesetzt werden.

Wir betrachten  $u - \Delta u = f$  in  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $\hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = \hat{f}$ , d.h.  $\hat{u} = (1 + |\xi|^2)^{-1} \hat{f}$ .

Frage: Ist  $(1 + |\xi|^2)^{-1}$  ein Fouriermultiplikator?

**Theorem X.2.** Sei  $p = 2$ . Dann ist  $m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$  ein Fouriermultiplikator genau dann, wenn  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:.** Mit Plancharel folgt

$$\begin{aligned} \|T_m f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = c \|m \mathcal{F} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\mathcal{F} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in S(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Falls umgekehrt  $m \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$  dann existiert eine Folge messbarer Mengen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  mit

- $0 \leq c_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$
- $0 < |A_n| < \infty$
- $|m| \geq c_n$  auf  $A_n$

Für  $g_n := \chi_{A_n}$  gilt dann

$$\|T_m g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi) g_n(\xi)|^2 d\xi \geq c_n^2 |A_n| = c_n^2 \|g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Insbesondere folgt aus dem Satz, dass  $\xi \mapsto \frac{1}{1+|\xi|^2}$  ein Fouriermultiplikator auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ist. Der Fall  $p \neq 2$  ist deutlich schwieriger.

**Theorem X.3.** Sei  $p \in (1, \infty)$  und  $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{C}$  eine Funktion. Falls eine der Bedingungen

## X. Fouriermultiplikatoren

(i)  $m \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  und  $|\xi|^{|\beta|} |D^\beta m(\xi)| \leq c_m$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, |\beta| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$   
(siehe [Mik57])

(ii)  $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  und  $|\xi^\beta D^\beta m(\xi)| \leq c_m$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \beta \in \{0, 1\}^n$  (siehe [Liz63]).

mit  $c_n > 0$  erfüllt, so ist  $m$  ein Fouriermultiplikator auf  $L^p(\mathbb{R}^n)$  und

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c(n, p)c_m$$

**Beweis:.** Ohne Beweis.

**Bemerkung X.4.** Für  $p \neq 2$  sind keine optimalen Bedingungen bekannt.

**Beispiel X.5.** Sei  $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{C}$  homogen vom Grad  $d \in \mathbb{N}_0$ , d.h.

$$m(\zeta \xi) = \zeta^d m(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \zeta > 0$$

Falls  $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , so ist  $D^\beta m$  homogen vom Grad  $k - |\beta|$  für  $|\beta| \leq k$ . insbesondere erfüllt ein homogenes Symbol  $m \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  vom Grad 0 die Mikhilin-Bedingung. In diesem Fall ist

$$c_m = \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}} \max_{|\eta|=1} |D^\alpha m(\eta)|$$

**Beweis:.** Für  $j = 1, \dots, n$  gilt

$$|(\partial_j m)(\zeta \xi)| = \lim_{h \rightarrow 0} \zeta^d \frac{m(\xi + \frac{h}{\zeta} e_j) - m(\xi)}{\frac{h}{\zeta}} = \zeta^{d-1} (\partial_j m)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \zeta > 0.$$

Der Rest folgt mit Induktion. Insbesondere gilt für ein homogenes Symbol  $m \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  vom Grad 0:

$$|m(\xi)| = \left| m \left( |\xi| \frac{\xi}{|\xi|} \right) \right| = \left| m \left( \frac{\xi}{|\xi|} \right) \right| \leq \max_{|\eta|=1} |m(\eta)| =: M < \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} |\xi|^{|\beta|} |D^\beta m(\xi)| &= |\xi|^{|\beta|} \left| D^\beta m \left( |\xi| \frac{\xi}{|\xi|} \right) \right| = |\xi|^{|\beta|} |\xi|^{-|\beta|} \left| D^\beta m \left( \frac{\xi}{|\xi|} \right) \right| \\ &\leq \max_{|\eta|=1} |D^\beta m(\eta)| =: M_\beta < \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

**Theorem X.6.** Sei  $p \in (1, \infty)$  und  $\lambda \in \sum_\Theta$  für ein  $\Theta \in (0, \pi)$ . Dann genügt die Lösung von

$$\lambda u - \Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n$$

der Abschätzung

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{|\lambda|^{\frac{n-k}{2}}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n), k = 0, 1, 2, |\alpha| = k.$$

Die Konstante  $c > 0$  ist unabhängig von  $\lambda \in \sum_\Theta$ .

**Beweis:.** Es gilt  $\hat{u}(\boldsymbol{\xi}) = m_\lambda(\boldsymbol{\xi})\hat{f}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$  wobei  $m_\lambda(\boldsymbol{\xi}) = (|\lambda| + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-1}$ . Zeige (ÜA): Die Mikhlín-Bedingung ist erfüllt.

**Bemerkung X.7.**

(a) Beachte  $\frac{\xi^\beta}{\lambda + |\xi|^2} \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$  für  $|\beta| > 2$ .

(b) Sei  $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ . Dann gilt

$$\xi^\beta \frac{1}{1 + |\xi|^2} \hat{f} = \frac{\xi^\alpha}{1 + |\xi|^2} \xi^{\beta-\alpha} \hat{f}$$

für  $|\alpha| \leq 2, \alpha \leq \beta$ . Mit Mikhlín ergibt sich

$$\|(1 - \Delta)^{-1} f\|_{W^{k+2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{k,p} \|f\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)}$$

wobei  $k \in \mathbb{N}_0, p \in (1, \infty)$ .



# XI. Operatortheorie

## XI.1. Abgeschlossene Operatoren

Im Folgenden seien  $X, Y$  Banachräume.

**Definition XI.1.** (a) Eine lineare Abbildung

$$A : D(A) \rightarrow X \text{ mit } D(A) \subset X$$

heißt *linearer Operator*.  $D(A)$  heißt *Definitionsbereich*. Ist  $A$  unbeschränkt, so heißt  $A$  *unbeschränkter Operator*.

(b) Ein Operator  $A : D(A) \rightarrow X$  heißt *abgeschlossen*, falls für jede konvergente Folge  $(x_n) \in D(A)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  in  $X$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$  in  $X$  folgt, dass  $x \in D(A)$  und  $Ax = y$ .

**Beispiel XI.2.**

$$A \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow A \text{ abgeschlossen (ÜA)}.$$

**Definition XI.3.** Sei  $A : D(A) \rightarrow X$  ein Operator. Die *Graphennorm* ist definiert durch

$$\|x\|_A := \|Ax\|_X + \|x\|_X$$

für  $x \in D(A)$ . Der Graph von  $A$  ist gegeben durch

$$G(A) := \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in D(A) \text{ mit } (z, Az) = (x, y)\}.$$

**Lemma XI.4.** *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

- (a)  $A$  ist abgeschlossen.
- (b)  $(D(A), \|\cdot\|_A)$  ist ein Banachraum.
- (c)  $G(A) \subset X \times X$  ist abgeschlossen.

**Beweis..** (ÜA)

**Definition XI.5.** Sei  $A : D(A) \rightarrow X$  ein Operator. Die Menge

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A) : D(A) \rightarrow X \text{ ist bijektiv und } (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

heißt *Resolventenmenge*. Die Abbildung  $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} =: R(\lambda, A)$  heißt *Resolvente* von  $A$ . Die Menge  $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  heißt *Spektrum* von  $A$ .

## XI. Operatortheorie

**Lemma XI.6.** Sei  $A : D(A) \rightarrow X$  ein Operator. Dann gilt:

- (a)  $\rho(A) \neq \emptyset \Rightarrow A$  abgeschlossen.
- (b)  $A$  abgeschlossen  $\Rightarrow \rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A) : D(A) \rightarrow X \text{ ist bijektiv}\}$ .
- (c)  $\lambda \in \rho(A) \Rightarrow R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X, (D(A), \|\cdot\|_A))$ .

**Beweis:.** (a)  $\lambda \in \rho(A), (x_n) \subset D(A)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$ . Dann gilt für  $z_n := (\lambda - A)x_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lambda x - y \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda, A)z_n = R(\lambda, A)(\lambda x - y) \in D(A).$$

Weiter gilt  $(\lambda - A)x = (\lambda - A)R(\lambda, A)(\lambda x - y) = \lambda x - y \Rightarrow Ax = y$ .

- (b)  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $(\lambda - A) : D(A) \rightarrow X$  bijektiv  $\Rightarrow (\lambda - A)^{-1}$  ist abgeschlossen (ÜA). Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt, dass  $(\lambda - A)^{-1}$  stetig ist.

- (c) (ÜA)

**Bemerkung XI.7.**

$$\begin{aligned} X &= C[0, 1], \quad A_i f = f', \quad i = 1, 2 \\ D(A_1) &= C^1[0, 1] \\ D(A_2) &= \{f \in C^1[0, 1] : f(1) = 0\} \\ \Rightarrow \sigma(A_1) &= \mathbb{C} \text{ und } \sigma(A_2) = \emptyset \end{aligned}$$

**Definition XI.8.** Sei  $A : D(A) \rightarrow X$  ein Operator. Dann heißt  $\lambda \in \mathbb{C}$  *Eigenwert* von  $A$ , falls es ein  $0 \neq x \in D(A)$  mit  $\lambda x = Ax$  gibt. Die Menge  $\sigma_p = \{\lambda \in \sigma : \lambda \text{ ist Eigenwert}\}$  heißt *Punktspektrum*.

## XI.2. Das Bochnerintegral

In diesem Abschnitt seien  $f : I \rightarrow X$  und  $f_n : I \rightarrow X$  stets Funktionen,  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $X$  ein Banachraum.

**Definition XI.9** (Einfache Funktionen). (a) Eine Funktion  $f : I \rightarrow X$  heißt *Stufenfunktion*, falls

$$f = \sum_{k=0}^n x_k \chi_{\Omega_k}$$

für messbare Mengen  $\Omega_k \subset I$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|\Omega_k| < \infty$  und  $x_k \in X$  ( $k = 0, \dots, n$ ).

- (b) Eine Funktion  $f : I \rightarrow X$  heißt *messbar*, falls sie punktweise durch Stufenfunktionen approximiert werden kann, d.h.  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ ,  $t \in I$  f.ü..

- (c) Eine Funktion  $f : I \rightarrow X$  heißt *schwach messbar*, falls für alle  $x' \in X'$  die Funktion  $t \mapsto \langle f(t), x' \rangle$  messbar ist.
- (d) Eine Funktion  $f : I \rightarrow X$  heißt *separabelwertig*, falls es eine Nullmenge  $\Omega_0 \subset I$  gibt mit

$$f(I \setminus \Omega_0) \text{ ist separabel in } X.$$

**Theorem XI.10** (Pettis). *Eine Funktion  $f : I \rightarrow X$  ist genau dann messbar, wenn  $f$  schwach messbar und  $f$  fast separabelwertig ist.*

**Beweis:.** (ÜA)

**Korollar XI.11.**

- (a) Sei  $f : I \rightarrow X$  stetig. Dann ist  $f$  messbar.
- (b) Sei  $X$  separabel. Dann ist  $f$  genau dann messbar, wenn  $f$  schwach messbar ist.
- (c) Sei  $(f_n)$  messbar und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$  f.ü.  $\Rightarrow f$  ist messbar.

**Beweis:.** (a)  $t \mapsto \langle f(t), x' \rangle$  ist stetig für alle  $x' \in X'$ . Damit ist  $f$  schwach messbar. Da  $\{f(t) : t \in I \cap \mathbb{Q}\}$  dicht in  $f(I)$  ist, folgt die Behauptung mit Theorem XI.10.

(b) klar (mit Theorem XI.10).

(c)  $\langle f_n(t), x' \rangle \rightarrow \langle f(t), x' \rangle \forall x' \in X' \Rightarrow f$  ist schwach messbar. Sei  $\Omega_n$  Nullmenge, so dass  $f_n(I \setminus \Omega_n)$  separabel ist. Setze  $\Omega_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ , dann gilt:

- $|\Omega_0| = 0$
- $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(I \setminus \Omega_n)$  ist separabel.
- $\overline{\Delta}$  ist separabel.
- $f(I \setminus (\Omega_0 \cap \tilde{\Omega})) \subset \overline{\Delta}$  wobei  $|\tilde{\Omega}| = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ ,  $t \in I \setminus \tilde{\Omega}$ .

Mit Theorem XI.10 folgt die Behauptung.



# Index

- adjungierter Operator, 33
- Burgersgleichung, 11
- d'Alemberts Formel, 15
- Definitionsbereich, 59
- Distribution
  - Cauchy-Hauptwert, 30
  - Dirac'sche  $\delta_a$ -Distribution, 30
  - Heaviside-Funktion, 32
- Eigenwert, 60
- elliptisch, 45
- Entropie-Bedingung, 13
- Euler-Poisson-Darboux-Gleichung, 16
- Fouriermultiplikator, 55
- Fundamentallösung, 28, 35
- Graphennorm, 59
- Greenfunktion, 41
- harmonisch, 23
- Integrallösung, 10
- Kirchhoff's Formel, 19
- Laplace-Gleichung, 23
- Leibnitz-Regel, 32
- linear, 1
  - linear, 59
- Mittelwerteigenschaft, 24
- nicht charakteristisch, 6
- Operator
  - abgeschlossen, 59
- Ordnung  $N$  auf  $\Omega$ , 30
  - parabolisch, 45
  - Poisson-Gleichung, 28
  - Poissonkern, 43
  - Punktspektrum, 60
- quasi-linear, 1
- Rankine-Hugoniot-Bedingung, 11
- Raum der schnell-fallenden Funktionen,
  - 47
- Resolventenmenge, 59
- Schock, 13
- schwach messbar, 61
- semi-linear, 1
- separabelwertig, 61
- Spektrum, 59
- Stufenfunktion, 60
- Symbol, 55
- T von der Ordnung  $N$  auf  $K$ , 30
- Testfunktion, 10
- Unstetigkeitskurve, 10
- voll nicht-linear, 1
- zulässig, 6



## Literaturverzeichnis

- [ÈdI70] S. D. Èĭ del'man and S. D. Ivasišen. Investigation of the Green's matrix of a homogeneous parabolic boundary value problem. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 23:179–234, 1970.
- [Ehr54] Leon Ehrenpreis. Solution of some problems of division. I. Division by a polynomial of derivation. *Amer. J. Math.*, 76:883–903, 1954.
- [Ehr55] Leon Ehrenpreis. Solution of some problems of division. II. Division by a punctual distribution. *Amer. J. Math.*, 77:286–292, 1955.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [Liz63] P. I. Lizorkin.  $(L_p, L_q)$ -multipliers of Fourier integrals. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 152:808–811, 1963.
- [Mal54] Bernard Malgrange. Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. II. Equations avec second membre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 238:196–198, 1954.
- [Mal56] Bernard Malgrange. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 6:271–355, 1955–1956.
- [Mik57] S.G. Mikhlin. Fourier integrals and multiple singular integrals. 1957.