

Partielle Differentialgleichungen I

Matthias Geissert

Inhaltsverzeichnis

Motivation	v
I. Einführung	1
II. Die Methode der Charakteristiken	3
II.1. Motivation anhand der Transportgleichung	3
II.2. Allgemeiner Fall	4
II.2.1. Herleitung einer ODE für $z(s)$, $p(s)$, $X(s)$	4
II.2.2. OBdA Rand von Ω 'lokal flach'	5
II.2.3. Bestimmung der Anfangsdaten für Ω mit glatten Rand	5
II.2.4. Nicht charakteristische Randdaten	6
II.2.5. Lokale Lösungen	7
II.2.6. Schwache Formulierung	10
II.2.7. Inhomogenes Problem	14
II.3. Die Wellengleichung	14
II.3.1. Der Fall $n = 1$	14
II.3.2. Der Fall $n = 3$	16
II.3.3. Der Fall $n = 2$	19
III. Harmonische Funktionen	23
III.1. Grundlagen	23
III.2. Eigenschaften von harmonischen Funktionen	24
III.2.1. Mittelwerteigenschaft	24
III.2.2. Maximumsprinzip	25
III.3. Regularität	26
III.4. Lokale Abschätzungen für harmonische Funktionen	26
III.5. Liouville	27
III.6. Analytische versus harmonische Funktionen	27
III.7. Harnack-Ungleichung	28
IV. Einführung in die Distributionentheorie	29
IV.1. Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$	29
IV.2. Elementare Operationen mit Distributionen	31
IV.2.1. Multiplikation mit einer Funktion	31
IV.2.2. Ableitung der Distribution	31
IV.2.3. Der adjungierte Operator	33
IV.3. Faltung	33

IV.4. Fundamentallösung	35
V. Fundamentallösungen	37
VI. Greenfunktionen	39
VI.1. Herleitung der Greenfunktion	39
VI.2. Eigenschaften der Greenfunktion	41
VI.3. Die Greenfunktion im Halbraum	42
VII Allgemeiner Differentialoperatoren	45
VIII Temperierte Distributionen	47
VIII.1. Der Raum der schnell-fallenden Funktionen	47
VIII.2. Temperierte Distributionen	48
Index	49

Motivation

Wir betrachten einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung und wollen die Wärmeleitung untersuchen. Dazu treffen wir folgende Annahmen:

- Der Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall $[0, 1]$ und $u(x, t)$ ist die Temperatur an der Stelle x zum Zeitpunkt t .
- Konstanten: ρ Dichte, c spezifische Wärme
- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Wärmequelle
- Energie in Segment $[x_1, x_2] : E(x_1, x_2, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(x_1, t)$
- Sei $Q(x, t)$ die thermische Energie durch den Punkt x zum Zeitpunkt t und K_0 die thermale Konduktivität. Dann gilt

$$\frac{Q(x, t_2) - Q(x, t_1)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(x, t_1).$$

- Energieerhaltung:

$$c\rho(x_2 - x_1)(u(x_1, t_2) - u(x_1, t_1)) = (t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1) \left(\frac{\partial}{\partial x} (u(x_1, t_1) - u(x_2, t_1)) \right).$$

Daraus folgt

$$\frac{u(x_1, t_2) - u(x_1, t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u(x_1, t_1) - u(x_2, t_1)}{x_1 - x_2} \right)$$

und somit

$$\partial_t u(x_1, t_1) = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_1, t_1), \quad (1)$$

wobei $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ die Konstante der thermischen Diffusivität ist. Gleichung (1) heißt Wärmeleitungsgleichung. Bei stationärer Temperaturverteilung gilt $0 = \partial_t u(x, t)$ und damit

$$0 = f(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t).$$

Partielle Differentialgleichungen tauchen also in natürlicher Weise in Anwendungen auf. Im Rahmen dieser Vorlesung sind partielle Differentialgleichungen immer ohne Herleitung gegeben.

I. Einführung

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets ein Gebiet.

Definition I.1.

$$F(D^k u(\mathbf{x}), D^{k-1}u(\mathbf{x}), \dots, Du(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{I.1})$$

heißt partielle Differentialgleichung (PDE) k-ter Ordnung.

Hier ist $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht.

Wir untersuchen folgende Typen von PDE's.

Definition I.2. PDE (I.1) heißt

(a) *linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u - f(\mathbf{x}),$$

(b) *semi-linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, \mathbf{x})$$

für $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben,

(c) *quasi-linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, \mathbf{x}) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, \mathbf{x})$$

für $a_\alpha, a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und

(d) *voll nicht-linear*, falls in der Situation von (c) a_α auch von $D^k u$ abhängt.

Später werden wir sehen, dass sich der semi- und der quasi-lineare Fall mit Hilfe eines Fixpunktarguments auf den linearen Fall reduzieren lassen, wobei der quasi-lineare Fall technisch schwieriger ist. Später werden wir auch weitere Typen linearer PDE's diskutieren.

Definition I.3.

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{I.2})$$

heißt System von PDE's k-ter Ordnung. Hier ist $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \dots \times \mathbb{R}^m \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben und $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ gesucht.

I. Einführung

Beispiel I.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

(a) Laplace Gleichung:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

(b) Transportgleichung:

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(c) Wärmeleitungsgleichung:

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(d) Wellengleichung:

$$\partial_t^2 u(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(e) Navier-Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) + (\nabla_{\mathbf{x}} p)(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Hier ist $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ das gesuchte Geschwindigkeitsfeld und $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ der gesuchte (Druck). Die rechte Seite $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist gegeben.

Damit die PDE's eindeutig lösbar sind, müssen noch entsprechende Randbedingungen und/oder Anfangsbedingungen gefordert werden.

Typische Fragestellungen, die im Rahmen dieser Vorlesung untersucht werden sind:

- (a) Existenz.
- (b) Eindeutigkeit.
- (c) Regularität.
- (d) Abbildungsverhalten der Gleichung ¹.
- (e) Weitere Eigenschaften der Lösung.

In den folgenden Kapiteln diskutieren wir unterschiedliche Zugänge zur Beantwortung dieser Fragen. Leider lässt sich in nur wenigen Fällen die Lösung einer PDE explizit berechnen. Daher werden im Rahmen dieser Vorlesung sowohl "explizite" als auch abstrakte Methoden (welche zumindest erlauben, einige Aussagen über die Lösung zu treffen) vorgestellt.

¹Beispielsweise besitzt $u - \Delta u = f$ genau dann eine eindeutige Lösung $u \in X$, wenn $f \in Y$, d.h. $(1 - \Delta) : X \rightarrow Y$ ist ein Isomorphismus.

II. Die Methode der Charakteristiken

II.1. Motivation anhand der Transportgleichung

Für $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$\partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (\text{II.1})$$

$$u = g, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \quad (\text{II.2})$$

Idee: Finde Weg $\mathbf{X}_{\mathbf{x}_0} : I \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+1}$ entlang dem sich u durch Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE) berechnen lässt. Um die Notation zu erleichtern setze im Folgenden $\mathbf{X}_{\mathbf{x}_0}(s) = \mathbf{X}(s)$ und $\partial_{n+1} = \partial_t$. Weiter sei

$$z(s) = u(\mathbf{X}(s)), \quad \mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{X}(s)), \quad z(0) = g(\mathbf{x}_0).$$

Dann folgt mit der Kettenregel

$$\dot{z}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} (\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{p}(s) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s). \quad (\text{II.3})$$

Die Ableitung von $\mathbf{p}(s)$ ergibt komponentenweise erneut mit der Kettenregel

$$(\dot{\mathbf{p}}^i)(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u \\ \partial_t \partial_i u \end{pmatrix} (\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Aus (II.1) folgt $\partial_i \partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u = 0$ oder als Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} \partial_t \partial_i u \\ \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0.$$

Setze $\dot{\mathbf{X}}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h.

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 + s\mathbf{b} \\ s \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $\dot{\mathbf{p}}^i(s) = 0$. Mit

$$\mathbf{p}(0) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} (\mathbf{x}_0, 0)$$

II. Die Methode der Charakteristiken

folgt $\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}(\mathbf{x}_0, 0)$. Gleichung (II.3) impliziert nun

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} u)(\mathbf{x}_0, 0) + (\partial_t u)(\mathbf{x}_0, 0) \stackrel{(II.1)}{=} 0 \\ z(0) &= g(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$u(\mathbf{x}_0, 0) \stackrel{(II.2)}{=} g(\mathbf{x}_0) = z(s) = u(\mathbf{X}(s)) = u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}s, s).$$

Mit $\mathbf{x} := \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}s$ folgt also $u(\mathbf{x}, s) = u(\mathbf{x} - \mathbf{b}s, 0) = g(\mathbf{x} - \mathbf{b}s)$. Insgesamt erhalten wir

Theorem II.1. Sei $k \in \mathbb{N}$, $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Dann löst

$$u(\mathbf{x}, s) = g(\mathbf{x} - \mathbf{b}s) \in C^k(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$$

die Transportgleichung (II.1).

Bemerkung II.2. u ist nicht glatter als g .

II.2. Allgemeiner Fall

Betrachte nun beliebige PDE 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} F(Du(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \Gamma \end{aligned} \tag{II.4}$$

Hierbei ist $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und glatt.

II.2.1. Herleitung einer ODE für $z(s)$, $\mathbf{p}(s)$, $\mathbf{X}(s)$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} z(s) &= u(\mathbf{X}(s)) \\ \mathbf{p}(s) &= (\nabla u)(\mathbf{X}(s)) \end{aligned}$$

und berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= (\nabla u)(\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{p}(s) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) \\ \dot{\mathbf{p}}^i(s) &= (\nabla \partial_i u)(\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Ziel: Elimiere Ableitungen 2. Ordnung. Aus (II.4) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \partial_{\mathbf{p}_j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \partial_i \partial_j u + \partial_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \partial_i u \\ + \partial_i F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Also setze

$$\dot{\mathbf{X}}^j(s) = \partial_{\mathbf{p}_j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)), \quad j = 1, \dots, n$$

Dann gilt

$$\dot{\mathbf{p}}^i(s) = -\partial_{\mathbf{p}_i} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \mathbf{p}^i(s) - \partial_i F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)), \quad i = 1, \dots, n$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(s) &= -\partial_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \mathbf{p}(s) - D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \cdot (\nabla_{\mathbf{p}} F)(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \\ \dot{\mathbf{X}}(s) &= (\nabla_{\mathbf{p}} F)(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Insbesondere erfüllt jede Lösung $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$ von (II.4) das System (II.5) solange $x(s) \in \Omega$.

II.2.2. OBdA Rand von Ω 'lokal flach'

Rand von Ω flach bedeutet $\Gamma \cong \mathbb{R}_+^n$. In einer Umgebung $U \subset \Gamma$ von $x_0 \in \Gamma$ lässt sich Γ durch Schieben und Drehen in den Graph einer glatten 'kleinen' Funktion $\phi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ überführt. Setze nun

$$\begin{aligned} v(y) &= u(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + \phi(y_1, \dots, y_{n-1})), \\ u(x) &= v(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, \dots, x_{n-1})), \\ \Phi(x) &= (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, \dots, x_{n-1})), \\ \Psi(x) &= (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \phi(x_1, \dots, x_{n-1})). \end{aligned}$$

Dann gilt wegen $(\nabla u)(\mathbf{x}) = (\nabla v)(\mathbf{y})(\nabla \Phi)(\mathbf{x})$ die Gleichung

$$0 = F((\nabla u)(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = F((\nabla v)(\mathbf{y})(\nabla \Phi)(\mathbf{x}), v(\mathbf{y}), \Psi(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}),$$

d.h. für ein geeignetes G und $\Omega_* \subset \Phi(\Omega)$:

$$G(\nabla v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \Omega_*.$$

Außerdem $v = h$ auf $\Gamma_* \subset \Phi(\Gamma)$ mit $h(\mathbf{y}) = g(\Psi(\mathbf{y}))$, d.h. (II.4) ist lokal äquivalent zu

$$\begin{aligned} G(\nabla v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y}), \mathbf{y}) &= 0 \text{ in } \Omega_* \\ v &= h \text{ auf } \Gamma_* \end{aligned}$$

II.2.3. Bestimmung der Anfangsdaten für Ω mit glatten Rand

Definiere $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}(0)$, $z_0 = z(0) = g(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$. Wie in Section II.1 gilt dann

$$\begin{aligned} \partial_j u(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{p}_{0,j} = (\partial_j g)(\mathbf{x}_0), \quad j = 1, \dots, n-1, \\ F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) &= 0. \end{aligned}$$

II. Die Methode der Charakteristiken

Insgesamt erhalten wir somit die Kompatibilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ z(0) &= z_0, \\ \mathbf{p}_j(0) &= (\partial_j g)(\mathbf{x}_0), \quad j = 1, \dots, n-1 \\ F(\mathbf{p}(0), z(0), \mathbf{X}(0)) &= 0. \end{aligned} \tag{II.6}$$

Der Punkt $(\mathbf{x}_0, z_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ heißt *zulässig*, falls (II.6) erfüllt ist. Beachte, dass z_0 durch die Wahl von \mathbf{x}_0 festgelegt ist. Existenz und Eindeutigkeit von \mathbf{p}_0 ist nicht klar.

II.2.4. Nicht charakteristische Randdaten

In diesem Abschnitt wollen wir stets annehmen, dass $(\mathbf{x}_0, z_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ zulässig ist. Wir wollen (II.6) jedoch nicht nur in $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$, sondern in einer Umgebung von \mathbf{x}_0 betrachten. Dies führt auf folgende Erweiterung von (II.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(0) &= \mathbf{y}, \\ \mathbf{p}(0) &= \mathbf{q}(\mathbf{y}), \\ z(0) &= g(\mathbf{y}), \\ \mathbf{q}_j(\mathbf{y}) &= (\partial_j g)(\mathbf{y}), \quad j = 1, \dots, n-1, \\ F(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y}) &= 0, \quad \mathbf{y} \in U_{\mathbf{x}_0}, \end{aligned} \tag{II.7}$$

wobei $U_{\mathbf{x}_0}$ eine Umgebung von \mathbf{x}_0 in Γ ist.

Lemma II.3. *Sei $F_{\mathbf{p}_n}(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \neq 0$. Dann existiert eine eindeutige Lösung q von (II.7) für $\mathbf{y} \in \Gamma$ nahe bei x_0 . In diesem Fall heißt $(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0)$ nicht charakteristisch.*

Beweis:. *Definiere $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \times U_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) &= \mathbf{p}_i - \partial_i g(\mathbf{y}), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \mathbf{G}_n(\mathbf{p}, \mathbf{y}) &= F(\mathbf{p}, g(\mathbf{y}), \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Dann folgt $\mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x}_0) = 0$ und

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \partial_{\mathbf{p}_1} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) & \partial_{\mathbf{p}_2} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) & \cdots & \partial_{\mathbf{p}_{n-1}} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) & \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Insbesondere gilt also $\det \mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x}_0) = \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \neq 0$. Die Existenz von \mathbf{q} in einer Umgebung von \mathbf{x}_0 in Γ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen mit $\mathbf{G}(\mathbf{q}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$ und $\mathbf{q}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}_0$.

Bemerkung II.4. *Falls Γ nicht flach $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ ist, so ist $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ nicht charakteristisch falls $D_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \nu(\mathbf{x}_0) \neq 0$, wobei ν die äußere Normale bezeichnet.*

II.2.5. Lokale Lösungen

OBdA sei Γ in diesem Abschnitt flach. Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(s) &= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(y_1, \dots, y_{n-1}, s), \\ z(s) &= z(\mathbf{y}, s) = z(y_1, \dots, y_{n-1}, s), \\ \mathbf{X}(s) &= \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{X}(y_1, \dots, y_{n-1}, s).\end{aligned}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung von (II.5) mit Anfangsdaten (II.7) (Übungsaufgabe). Wie im Abschnitt II.1 müssen wir X invertieren.

Lemma II.5. *Sei $(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0)$ nicht charakteristisch. Dann existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ um 0 und Umgebungen $W \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von \mathbf{x}_0 sowie $V \subset \mathbb{R}^n$ von \mathbf{x}_0 , sodass für alle $\mathbf{x} \in V$ eindeutige $s = S(\mathbf{x}) \in I$ und $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \in W$ existieren mit $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x}))$. Die Abbildungen S und \mathbf{Y} sind C^2 .*

Beweis:. *Es gilt $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{X}(\mathbf{y}, 0) = (\mathbf{y}, 0)$. Weiter*

$$(\nabla \mathbf{X})(\mathbf{x}_0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{\mathbf{p}_1} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \partial_{\mathbf{p}_{n-1}} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x}_0), \end{bmatrix}$$

d.h. $\det(\nabla \mathbf{X})(\mathbf{x}_0, 0) \neq 0$ nach Voraussetzung. Die Behauptung folgt nach dem Satz über die Umkehrabbildung.

Theorem II.6. *Unter den Voraussetzungen von Lemma (II.5) setze $u(\mathbf{x}) = z(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$, wobei \mathbf{y} , s , \mathbf{p} und z wie oben definiert sind. Dann gilt*

$$\begin{aligned}F(\nabla u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in V, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \cap \Gamma.\end{aligned}$$

Beweis:. Schritt 1: Löse (II.5), (II.6).

Die Existenz einer Lösung $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)$, $z(s) = z(\mathbf{y}, s)$, $\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)$ von (II.5) und (II.6) folgt unmittelbar aus der Theorie für gewöhnliche DGL.

Schritt 2: *Es gilt $f(\mathbf{y}, s) = F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) = 0$ für $\mathbf{y} \in W$ und $s \in I$.*

Wegen $\mathbf{p}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{q}(\mathbf{y})$, $z(\mathbf{y}, 0) = g(\mathbf{y})$ folgt $f(\mathbf{y}, 0) = 0$ für $\mathbf{y} \in W$. Weiter folgt mit (II.5) dann (Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned}\partial_s f(\mathbf{y}, s) &= D_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \partial_s \mathbf{p} + \nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \partial_s z + \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \partial_s \mathbf{X} \\ &= D_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) [-\nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{p} - \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X})] + D_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) = 0, \quad s \in I.\end{aligned}$$

II. Die Methode der Charakteristiken

Schritt 3: Wir zeigen $F(\mathbf{p}(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in V$. Mit Schritt 2 folgt direkt:

$$F(\mathbf{p}(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = F(\mathbf{p}(\mathbf{Y}(\mathbf{x})), S(\mathbf{x}), z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})), \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x}))) = 0.$$

Schritt 4: Wir zeigen $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V$. Zunächst zeige

$$\partial_s z(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s) \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial s}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \quad (\text{II.8})$$

$$\partial_{\mathbf{y}_j} z(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s) \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial \mathbf{y}_j}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_j} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \quad (\text{II.9})$$

Gleichung (II.8) folgt direkt aus (II.5).

Für (II.9) sei $\mathbf{y} \in \Gamma$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und setze

$$r_i(s) = \partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} r_i(0) &= \partial_i g - \mathbf{q}_i(\mathbf{y}) \stackrel{(\text{II.7})}{=} 0 \\ \dot{r}_i(s) &= \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s z(\mathbf{y}, s) - \partial_s \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Aus (II.8) folgt

$$\partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s z(\mathbf{y}, s) = (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_s \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s).$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot{r}_i(s) &= (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \partial_s \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \\ &\quad - \partial_s \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \\ &\stackrel{(\text{II.5})}{=} (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) - [-\nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \\ &\quad - \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)] \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \end{aligned}$$

Mit Schritt 2 folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\mathbf{y}_i} f(\mathbf{y}, s) = \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \\ &\quad + \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s) \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s), \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{r}_i(s) &= \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot [-\partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s)] + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \\ &= -\nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot r_i(s). \end{aligned}$$

Aus der Theorie von ODE folgt, dass $r_i \equiv 0$, $s \in I$, $i = 1, \dots, n-1$ eine Lösung von (II.10) ist, d.h. (II.9) gilt. Wir berechnen mit Hilfe von (II.8) und (II.9):

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}_j} u(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \partial_s z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot [\nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x})]. \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen:

$$\partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} \quad (\text{Kronecker-Delta})$$

Es gilt wegen $\mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{X}_k \\ &= \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) + \nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\partial_{\mathbf{x}_j} u(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s)$ und somit $\nabla_{\mathbf{x}} u = \mathbf{p}$.

Beispiel II.7. Wir betrachten eine lineare, homogene PDE, d.h.

$$F(\nabla u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla(u)(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}) \cdot u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{II.11})$$

Dann folgt mit

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= b(\mathbf{x}) \\ \nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= c(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= 0. \end{aligned}$$

und (II.5) (vgl. Übungen)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(s) &= -c(\mathbf{X}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \cdot b(\mathbf{X}(s)) = -c(\mathbf{X}(s)) \cdot z(s) \\ \dot{\mathbf{X}}(s) &= b(\mathbf{X}(s)). \end{aligned}$$

Annahme: Sei $c \equiv 0$ und $\dot{\mathbf{X}}(s) = b(\mathbf{X}(s))$ besitzt folgende Trajektorien:

INSERT PICTURE

Somit ist $z \equiv \text{const}$ entlang jeder Trajektorie; aber beachte Kompatibilitätsbedingung an g , da die Funktionswerte am Rand vorgeschrieben sind.

Annahme: Sei $c \equiv 0$ und $\dot{\mathbf{X}}(s) = b(\mathbf{X}(s))$ besitzt folgende Trajektorien:

INSERT PICTURE

Lösung ist nur glatt, falls g konstant ist.

Bemerkung II.8. Insbesondere folgt aus obigem Beispiel, dass i.A. keine glatte Lösung existiert.

II. Die Methode der Charakteristiken

II.2.6. Schwache Formulierung

Wir betrachten die PDE

$$\begin{aligned}\partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) &= g & \text{in } \mathbb{R}\end{aligned}\tag{II.12}$$

Multiplikation mit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}_+})$ liefert:

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x F(u)) \cdot \varphi \\ &= - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi + \int_{\mathbb{R}} g \cdot \varphi(\cdot, 0)\end{aligned}\tag{II.13}$$

φ heißt *Testfunktion*.

Definition II.9. Wir sagen, dass $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ eine *Integrallösung* von (II.12) ist, falls (II.13) für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}_+})$ gilt.

Wir betrachten folgende Situation:

INSERT PICTURE

Hierbei bezeichnet ν die äußere Normale, u sei glatt in V_l und V_r . C heißt *Unstetigkeitskurve*, falls u in C nicht stetig ist (wovon wir im Folgenden ausgehen). Somit ergibt sich

$$0 = \int_{V_l} u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi = - \int_{V_l} (\partial_t u + \partial_x F(u)) \varphi, \quad \varphi \in C_c^\infty(V_l).$$

Es folgt (für V_r analog):

$$\begin{aligned}\partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 & \text{in } V_l \\ \partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 & \text{in } V_r.\end{aligned}\tag{II.14}$$

Weiter gilt für $\varphi \in C_c^\infty(V)$:

$$\begin{aligned}0 &= \int_V u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi \\ &= - \int_{V_l \cup V_r} (\partial_t u + \partial_x F(u)) \varphi + \int_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_l \\ F(u_l) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi - \int_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_r \\ F(u_r) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi \\ &\stackrel{(II.14)}{=} \int_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_l - u_r \\ F(u_l) - F(u_r) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi,\end{aligned}$$

wobei u_l der Grenzwert von links in $C \cap V$ und u_r der Grenzwert von rechts ist.

Sei nun C gegeben durch $\{(x, t) : x = S(t)\}$ für $S : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Dann gilt

$$F(u_l) - F(u_r) = \dot{S} \cdot (u_l - u_r),$$

wobei

$$\nu \stackrel{(\ddot{U}A)}{=} \frac{1}{1 + (\dot{S})^2} \begin{pmatrix} -\dot{S} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Notation

$$\begin{aligned} [[u]] &= u_l - u_r && \text{(Sprung in } u \text{ entlang } C) \\ [[F(u)]] &= F(u_l) - F(u_r) && \text{(Sprung in } F(u) \text{ entlang } C) \\ \sigma &= \dot{S} && \text{ („Geschwindigkeit“ von } C) \end{aligned}$$

lässt sich dies über

$$[[F(u)]] = \sigma \cdot [[u]] \tag{II.15}$$

entlang der Unstetigkeitskurve C ausdrücken. Gleichung (II.15) heißt *Rankine-Hugoniot-Bedingung*.

Beispiel II.10 (*Burgersgleichung*). Setze

$$F(u) := \frac{u^2}{2}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 1 - x & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

und betrachte

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) &= 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g \text{ auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.16}$$

Die (projizierten) Charakteristiken haben die Form $[\ddot{U}A] Y(s) = (g(x_0)s + x_0, s)$, also ist die Lösung über

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x \leq t, 0 \leq t < 1, \\ \frac{1-x}{1-t} & t \leq x \leq 1, 0 \leq t < 1, \\ 0 & x \geq 1, 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

gegeben.

II. Die Methode der Charakteristiken

Für $t > 1$ kreuzen sich die Charakteristiken. Setze $s(t) = \frac{1+t}{2}$ und

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x < s(t), t \geq 1, \\ 0 & x > s(t), t \geq 1. \end{cases}$$

Dann gilt entlang s :

$$F(u_l) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}, \quad F(u_r) = \frac{0^2}{2} = 0, \quad u_l = 1, \quad u_r = 0,$$

d.h. $[[u]] = 1$, $[[F(u)]] = \frac{1}{2}$. Die Rankine-Hugoniot-Bedingung liefert also $\sigma = \frac{1}{2} = \dot{s}$.

Wir betrachten nun II.10 mit $g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$

Dann ist sowohl

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & x < t/2, \\ 1 & x > t/2 \end{cases} \quad \text{als auch} \quad u_2(x, t) = \begin{cases} 1 & x > t, \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

eine Integrallösung von II.10 ([ÜA] Überprüfe Rankine-Hugoniot-Bedingung).

Problem: Eindeutigkeit.

Im Folgenden nehmen wir an, dass wir von einem Punkt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ausgehend entlang einer (projizierten) Charakteristik **rückwärts** keine andere Charakteristik treffen.

Sei nun C wieder eine Unstetigkeitskurve und $P \in C$, so dass P von den Charakteristiken Y_1 und Y_2 getroffen wird.

Dann gilt wegen $Y_i(s) = (F'(g(x_i))s + x_i, s)$, $i = 1, 2$, $x_1 < x_2$ für die Charakteristiken, dass

$$\begin{aligned} F'(u_l)s + x_1 = F'(u_r)s + x_2 &\Rightarrow (F'(u_l) - F'(u_r))s = x_2 - x_1 > 0 \\ \stackrel{[\dot{U}^A]}{\Rightarrow} F'(u_l) > \sigma > F'(u_r). \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Diese Ungleichung nennt man auch *Entropie-Bedingung*. Eine Unstetigkeitskurve nennt man *Schock* falls (II.17) und die Rankine-Hugonit-Bedingung erfüllt sind.

Sei nun F gleichmäßig konvex, d.h. $F'' \geq \Theta > 0$ für ein $\Theta > 0$. Dann folgt wegen F' streng monoton wachsend, dass (II.17) zu $u_l > u_r$ äquivalent ist. Insbesondere ist F' injektiv und surjektiv. Wir definieren

$$G := (F')^{-1}.$$

Dann ist eine Integrallösung von II.10 für $g(x) = \begin{cases} u_l & x < 0, \\ u_r & x > 0 \end{cases}$ und $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \begin{cases} u_l & \frac{x}{t} < \sigma \\ u_r & \frac{x}{t} > \sigma \end{cases} \text{ mit } \sigma = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r} \quad \text{falls } u_l > u_r \\ \text{bzw. } u(x, t) &= \begin{cases} u_l & \frac{x}{t} < F'(u_l) \\ G(\frac{x}{t}) & F'(u_l) < \frac{x}{t} < F'(u_r) \\ u_r & \frac{x}{t} > F'(u_r) \end{cases} \quad \text{falls } u_l < u_r \end{aligned}$$

(ohne Beweis).

Bemerkung II.11.

(a) Im ersten Fall sind u_l und u_r durch einen Schock getrennt, im zweiten Fall durch eine Rarefaction Wave.

II. Die Methode der Charakteristiken

- (b) Man kann zeigen, dass für F konvex und glatt höchstens eine Integrallösung existiert, welche zusätzlich

$$u(x+z, t) - u(x, t) \leq c\left(1 + \frac{1}{t}\right)z, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z, t > 0$$

für ein $c > 0$ genügt. Insbesondere sind diese Lösungen eindeutig.

- (c) Die Existenz einer Integrallösung lässt sich mit Variationsrechnung zeigen, vgl. Lax-Oleinik-Formel ([Eva10, Abschnitt 3.4.2]).

II.2.7. Inhomogenes Problem

Wir betrachten in diesem Abschnitt:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u &= f && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Wie in Abschnitt 1 setzen wir

$$z(s) = u(\mathbf{X}(s)), \quad \mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}(\mathbf{X}(s)), \quad \dot{\mathbf{X}}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt mit $\partial_{n+1} = \partial_t$, dass

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \dot{\mathbf{X}}(s), \\ (\dot{\mathbf{p}}^i)(s) &= \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u \\ \partial_t \partial_i u \end{pmatrix}(\mathbf{X}(s)) \cdot \mathbf{X}(s), \quad i = 1, \dots, n+1 \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix} = f(\mathbf{X}(s)). \end{aligned}$$

Integration der letzten Gleichung ergibt

$$z(t) - z(0) = \int_0^t f(\mathbf{X}(s)) ds = \int_0^t f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}s, s) ds,$$

d.h. $u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}t, t) = \int_0^t f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}s, s) ds$. Mit $\mathbf{x} := \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}t$ folgt dann

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t f(\mathbf{x} + \mathbf{b}(s-t), s) ds. \quad (\text{II.19})$$

II.3. Die Wellengleichung

II.3.1. Der Fall $n = 1$

Wir betrachten zunächst

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Wegen $(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = \partial_t^2 u - \partial_x^2 u$ lässt sich II.20 in

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x u &= v && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_t v + \partial_x v &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ v &= h - \partial_x g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

umschreiben. Mit Abschnitt 1 folgt nun ($b = 1$)

$$v(x, s) = h(x - s) - (\partial_x g)(x - s) =: a(x - s).$$

Mit Abschnitt 2.7 folgt analog ($b = -1$, $f(x, s) = v(x, s)$)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t v(x - (s - t), s) ds + g(x + t) \\ &= \int_0^t a(x + t - 2s) ds + g(x + t) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + g(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (\partial_x g)(y) dy + g(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy + \frac{1}{2} g(x + t) + \frac{1}{2} g(x - t) \end{aligned} \tag{II.21}$$

Dies ist *d'Alemberts Formel*. In (*) wurde die Substitution $y = x + t - 2s$, $dy = -2ds$ verwendet.

Theorem II.12. Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ dann ist $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ definiert durch II.21 eine Lösung von II.20.

Beweis:. Nachrechnen.

Im nächsten Schritt betrachten wir

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u &= 0 && \text{auf } \{x = 0\} \times \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{II.22}$$

mit $g(0) = h(0) = 0$.

Idee: Erweitere u , g , h auf \mathbb{R} , d.h.

$$\tilde{g} = \begin{cases} g(x) & , x \geq 0 \\ -g(-x) & , x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{h} = \begin{cases} h(x) & , x \geq 0 \\ -h(-x) & , x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{u} = \begin{cases} u(x) & , x \geq 0 \\ -u(-x) & , x < 0 \end{cases}.$$

II. Die Methode der Charakteristiken

Falls u Gleichung (II.22) löst, so löst \tilde{u}

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tilde{u} - \partial_x \tilde{u} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \tilde{u} &= \tilde{g} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ \partial_t \tilde{u} &= \tilde{h} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Nach (II.19) ist \tilde{u} über

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy$$

gegeben. Insbesondere folgt $\tilde{u}(0, t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(t) + \tilde{g}(-t)) + \frac{1}{2} \int_{-t}^t \tilde{h}(y) dy = 0$ für $t \geq 0$ und

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & , x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy & , 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Beachte: $u \notin \mathcal{C}^2$ falls $g''(0) \neq 0$

II.3.2. Der Fall $n = 3$

Wir setzen

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}, r, t) &:= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{\partial B(\mathbf{x}, r)} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}, t) \quad (\text{Mittelwert über } \partial B(\mathbf{x}, r)), \\ G(\mathbf{x}, r, t) &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} g(\mathbf{y}, t), \quad H(\mathbf{x}, r, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} h(\mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta_{\mathbf{x}} u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.23}$$

für $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n), h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

Lemma II.13. ((Euler-Poisson-Darboux-Gleichung))

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ eine Lösung von (II.23). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U - \partial_r^2 U - \frac{n-1}{r} \partial_r U &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ U &= G && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \partial_t U &= H && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.24}$$

Beweis:. Mit

$$U(\mathbf{x}, r, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \stackrel{\ddot{U}A}{=} \int_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, t) dS(\mathbf{z})$$

folgt

$$\begin{aligned} \partial_r U(\mathbf{x}, r, t) &= \int_{\partial B(0,1)} \mathbf{z}(\nabla u)(\mathbf{x} + r\mathbf{z}, t) dS(\mathbf{z}) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} (\nabla u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \nu(\nabla u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \frac{1}{|\partial B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \operatorname{div}(\nabla u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{|B(\mathbf{x}, r)|}{|\partial B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} (\Delta u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \stackrel{\ddot{U}A}{=} \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} (\Delta u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\partial_r^2 U(\mathbf{x}, r, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}). \quad (\text{II.25})$$

Damit folgt $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ und

$$\begin{aligned} \lim_{r \searrow 0} \partial_r U(\mathbf{x}, r, t) &= 0, \\ \lim_{r \searrow 0} \partial_r^2 U(\mathbf{x}, r, t) &= \frac{1}{n} \Delta u(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Aus (II.23) ergibt sich dann

$$\partial_r U(\mathbf{x}, r, t) = \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y}, t) dy = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y}, t) dy,$$

wobei $\alpha(n)$ das Ma\ss der Einheitskugel bezeichnet. Insbesondere erhalten wir

$$r^{n-1} \partial_r U(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y}, t) dy. \quad (\text{II.27})$$

II. Die Methode der Charakteristiken

Mit den Gleichungen (II.27) und (II.25) folgt dann

$$\begin{aligned}
\partial_r(r^{n-1}\partial_r U(\mathbf{x}, r, t)) &= (n-1)r^{n-2}\partial_r U(\mathbf{x}, r, t) + r^{n-1}\partial_r^2 U(\mathbf{x}, r, t) \\
&= \frac{n-1}{n\alpha(n)} \frac{1}{r} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) + r^{n-1} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} (\Delta u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \\
&\quad + r^{n-1} \frac{1-n}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} (\Delta u)(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \\
&= r^{n-1} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) = r^{n-1} \partial_t^2 U,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt $|B(\mathbf{x}, r)| = r^n \alpha(n)$ verwendet haben. Insgesamt folgt

$$(n-1)r^{n-2}\partial_r U(\mathbf{x}, r, t) + r^{n-1}\partial_r^2 U(\mathbf{x}, r, t) = r^{n-1}\partial_t^2 U$$

Teilt man beide Seiten der Gleichung durch r^{n-1} , so folgt die Behauptung.

Sei nun $n = 3$. Wir setzen $\tilde{U} = rU$, $\tilde{G} = rG$ und $\tilde{H} = rH$. Dann folgt mit (II.24)

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 \tilde{U} = r\partial_t^2 U &= r(\partial_r^2 U + \frac{2}{r}\partial_r U) = r\partial_r^2 U + 2\partial_r U = \partial_r(U + r\partial_r U) \\
&= \partial_r \partial_r \tilde{U} = \partial_r^2 \tilde{U}
\end{aligned}$$

und mit (II.26)

$$\partial_r^2 \tilde{G}(0) = 0 \cdot \partial_r^2 G(0) + 2\partial_r G(0) = 0,$$

d.h. \tilde{U} löst

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 \tilde{U} - \partial_r \tilde{U} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\
\tilde{U} &= \tilde{G} && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\
\partial_t \tilde{U} &= \tilde{H} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \\
\tilde{U} &= 0 && \text{auf } \{r=0\} \times \mathbb{R}_+
\end{aligned} \tag{II.28}$$

Mit Abschnitt II.3.1 folgt

$$\tilde{U}(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy$$

und

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}, t) &= \lim_{r \searrow 0} U(\mathbf{x}, r, t) = \lim_{r \searrow 0} \frac{\tilde{U}(\mathbf{x}, r, t)}{r} = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{2r} (\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2r} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \\
 &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) = \frac{\partial}{\partial t} (tG(t)) + tH(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} g \, ds \right) + t \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} h \, ds.
 \end{aligned} \tag{II.29}$$

Wie oben folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} g(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z}) = \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} z(\nabla g)(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z}) \\
 &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{t} (\nabla g)(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{z})
 \end{aligned}$$

Mit (II.29) löst u , definiert über

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} th(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y})$$

löst (II.23) Diese Formel heisst *Kirchhoff's Formel*

Theorem II.14. Sei $n = 3$, $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist die Lösung von (II.23) über

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} th(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \tag{II.30}$$

gegeben.

Bemerkung II.15. Obiger Ansatz kann auf beliebige, ungerade Dimension übertragen werden.

II.3.3. Der Fall $n = 2$

Leider ist keine Transformaion bekannt, welche die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung in eine eindimensionale Wellengleichung überführt. Wir setzen $\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t)$. Dann folgt nach Definition, dass \bar{u}

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 \bar{u} - \partial_x \bar{u} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\
 \bar{u} &= \bar{g} && \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \\
 \partial_t \bar{u} &= \bar{h} && \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}
 \end{aligned}$$

II. Die Methode der Charakteristiken

mit $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$ und $\bar{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)$ löst. Setzen wir $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, 0)$, so ist \bar{u} nach Formel II.29 über

$$\bar{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} \right) + t \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{h} d\bar{S}$$

gegeben.

$$u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} \right) + t \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{h} d\bar{S}, \quad \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, 0)$$

Wegen

$$\int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} \stackrel{(\ddot{U}A)}{=} \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} g(\mathbf{y}) (1 + |D\gamma|^2)^{\frac{1}{2}} d\mathbf{y}$$

wobei $\gamma(t) = (t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Mit $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, t)$ folgt $(\nabla\gamma)(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{-\frac{1}{2}} 2(\mathbf{y} - \mathbf{x})$

$$1 + |D\gamma|^2 = 1 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}^2} = \frac{t}{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y} = \frac{t}{2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y}$$

Analog natürlich auch für h , sodass folgt:

$$\Rightarrow u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \partial_t \left(t^2 \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y} \right) + \frac{t^2}{2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{h(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(t^2 \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y} \right) \\ &= \partial_t \left(t^2 \int_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(t^2 - t^2\mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{z} \right) \\ &= \partial_t \left(t \int_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(1 - \mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{z} \right) \\ &= \int_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(1 - \mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{z} + t \int_{B(0,1)} \frac{\mathbf{z}(\nabla g)(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{(1 - \mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{z} \\ &\stackrel{\mathbf{y}=\mathbf{x}+t\mathbf{z}}{=} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(1 - (\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t})^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y} + t \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{(\nabla g)(\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{(1 - (\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t})^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{t} d\mathbf{y} \\ &= t \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})}{(1 - (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Also:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{t(g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})) + t^2 h(\mathbf{y})}{(t^2 - (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y}$$

Insgesamt:

Theorem II.16. Sei $n = 2$, $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Dann ist die Lösung von (II.20) über

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{t(g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})) + t^2 h(\mathbf{y})}{(t^2 - (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}} d\mathbf{y}$$

gegeben.

Bemerkung II.17. Obiger Ansatz lässt sich auf beliebige gerade Dimensionen verallgemeinern.

III. Harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In diesem Abschnitt betrachten wir Lösungen der *Laplace-Gleichung*.

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{III.1}$$

für geeignetes g . Funktionen $u \in C^2(\Omega)$, welche $\Delta u = 0$ in Ω genügen heißen *harmonisch*.

III.1. Grundlagen

Folgende Grundlagen aus Analysis II werden eine wichtige Rolle spielen:

Proposition III.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit gleichmäßigem C^1 -Rand. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u = \int_{\partial\Omega} uv, \quad u \in C^1(\overline{\Omega})^n, u, \partial_j u \in L^1(\Omega)^n, j = 1, \dots, n$$

Hier bezeichnet ν die äussere Normale.

Beweis:. (ÜA)

Korollar III.2. *(Partielle Integration)*

Unter den Voraussetzungen von (III.1) gilt

$$\int_{\Omega} (\partial_i u)v + \int_{\Omega} u\partial_i v = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i; u, v \in C^1(\overline{\Omega}), v, \partial_i v, u, \partial_i u \in L^1(\Omega)$$

Beweis:. *Sei $i \in 1, \dots, n$. Definiere $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ über $U = uv e_i$. Dann folgt mit (III.1)*

$$\int_{\Omega} (\partial_i u)v + \int_{\Omega} u\partial_i v = \int_{\Omega} \partial_i(uv) = \int_{\Omega} \operatorname{div} U = \int_{\partial\Omega} U\nu = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i$$

Korollar III.3. *(Green'sche Formeln)*

Unter den Voraussetzungen von (III.1) gilt

$$(a) \int_{\Omega} (\Delta u)v - u\Delta v = \int_{\partial\Omega} v\partial_{\nu}u - u\partial_{\nu}v$$

$$(b) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = - \int_{\Omega} \Delta v + \int_{\partial\Omega} u\partial_{\nu}v$$

$$(c) \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu}u$$

für $u, v \in C^2(\overline{\Omega}) : v, \partial_i v, \partial_i \partial_j v, u, \partial_i u, \partial_i \partial_j u \in L^1(\Omega) \quad i = 1, \dots, n$

III. Harmonische Funktionen

Beweis:. Mit

$$\operatorname{div}(\nabla u)v = \operatorname{div} \begin{pmatrix} (\partial_1 u)v \\ \vdots \\ (\partial_n u)v \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (\partial_i^2 u)v + \sum_{i=1}^n (\partial_i u)(\partial_i v) = (\Delta u)v + (\nabla u \nabla v)$$

folgt

$$\int_{\Omega} v \Delta u + \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} \operatorname{div}((\nabla u)v) = \int_{\partial\Omega} (\nabla u)v \nu = \int_{\partial\Omega} (\partial_{\nu} u)v \quad (\text{III.2})$$

Analog:

$$\int_{\Omega} u(\Delta v + (\nabla u \nabla v)) = \int_{\partial\Omega} u \partial_{\nu} v \quad (\text{III.3})$$

\Rightarrow (a), (b)
(c) (ÜA)

III.2. Eigenschaften von harmonischen Funktionen

III.2.1. Mittelwerteigenschaft

Proposition III.4. Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gilt

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u = \int_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u \quad (\text{III.4})$$

für $\mathbf{x} \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B(\mathbf{x},r) \subset\subset \Omega$. (III.4) heißt Mittelwerteigenschaft auf Ω

Beweis:. Setze $\Phi(r) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})$. Dann gilt (vgl. Beweis von Lemma II.13)

$$\Phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} (\Delta u) = 0$$

Da u stetig ist, folgt $\lim_{r \searrow 0} \Phi(r) = u(\mathbf{x})$, d.h.

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})$$

Mit Kugelkoordinaten folgt weiter

$$\int_{B(\mathbf{x},r)} u = \int_0^r \left(\int_{\partial B(\mathbf{x},s)} u \right) ds = u(\mathbf{x}) \int_0^r n \alpha(n) s^{n-1} ds = u(\mathbf{x}) \alpha(n) s^n \Big|_0^r = \alpha(n) r^n u(\mathbf{x})$$

Wobei $n \alpha(n) s^{n-1}$ dem Maß der Kugelschale und $\alpha(n) r^n$ dem Maß der Kugel entspricht.

Proposition III.5. Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x},r) \subset\subset \Omega$. Dann ist u harmonisch.

Beweis:. Annahme: $(\Delta u) > 0$ für ein $\mathbf{x}_0 \in \Omega$.

Dann existiert ein $r > 0$: $(\Delta u)(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x},r)$. Nun gilt für Φ wie im Beweis von (III.4) mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$:

$$0 = \Phi'(r) = \int_{B(\mathbf{x}_0,r)} (\Delta u) > 0 \text{ Widerspruch!}$$

III.2.2. Maximumsprinzip

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets beschränkt.

Theorem III.6. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonisch. Dann gilt

$$(a) \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u(\mathbf{x})$$

$$(b) \text{ falls } \mathbf{x}_0 \in \Omega \text{ mit } u(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u(\mathbf{x}) \text{ und } \Omega \text{ zusammenhängend} \\ \Rightarrow u \text{ ist konstant.}$$

Beweis:. Sei $\mathbf{x}_0 \in \Omega$: $u(\mathbf{x}_0) = M =: \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u(\mathbf{x})$. Dann folgt mit (III.4)

$$M = u(\mathbf{x}_0) = \int_{B(\mathbf{x}_0,r)} u \leq M$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $u \equiv M$ in $B(\mathbf{x}_0,r)$. Damit ist die Menge $M = \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) = M\}$ offen und relativ abgeschlossen in Ω . Insbesondere $M \equiv \Omega$ falls Ω zusammenhängend.

(a) folgt aus (b) (ÜA)

Bemerkung III.7.

(a) Analog zu (III.6) lässt sich ein Minimumsprinzip beweisen. (ÜA)

(b) Betrachte eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ von (III.1) für Ω zusammenhängend und $g \geq 0$. Dann folgt $u > 0$ in Ω falls $g \neq 0$

Theorem III.8. (Eindeutigkeit) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Sei $g \in C(\partial\Omega)$, $\rho \in C(\Omega)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \rho \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{III.5}$$

Beweis:. Seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ Lösungen von III.5. Dann gilt

$$\begin{aligned} -\Delta(u_1 - u_2) &= 0 \text{ in } \Omega, \\ u_1 - u_2 &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit dem Maximums- und Minimumsprinzip folgt $u_1 - u_2 = 0$.

III.3. Regularität

Theorem III.9. $u \in C^2(\Omega)$ besitze die Mittelwertseigenschaft auf Ω . $\Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$.

Beweis:. Sei η_ϵ ein radialsymmetrischer Mollifier. Setze $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$ in $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) > \epsilon\}$. $\Rightarrow u^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} u^\epsilon(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \eta_\epsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{B(\mathbf{x}, \epsilon)} \eta_\epsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \int_0^\epsilon \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \eta_\epsilon(r)u(r, \cdot) dS dr = \int_0^\epsilon \eta_\epsilon \int_{\partial B(x, r)} (r)u(r, \cdot) dS dr \\ &= \int_0^\epsilon \eta_\epsilon |\partial B(x, r)| u(x) dr = \int_{B(x, \epsilon)} \eta_\epsilon(|x - y|) dy u(x) \\ &= u(x), \quad x \in \Omega_\epsilon, \end{aligned}$$

d.h. $u \in C^\infty(\Omega)$. Dabei haben wir im vierten Schritt verwendet, dass η_ϵ radialsymmetrisch und somit konstant auf der Kugelschale ist. Außerdem erlaubt die Mittelwertseigenschaft von u den sechsten Schritt.

Bemerkung III.10. Theorem III.9 sagt nichts über das Verhalten von u am Rand aus.

III.4. Lokale Abschätzungen für harmonische Funktionen

Theorem III.11. Sei u harmonisch in Ω . Dann gilt

$$|(\nabla^\alpha)(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))} \quad (\text{III.6})$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}_0, r) \subset\subset \Omega$ und jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k$. Hier ist

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_k = \frac{(2^{n-1}nk)^k}{\alpha(n)}.$$

Beweis:. via Induktion.

Fall $k = 0$ folgt aus MWE (ÜA).

Fall $k = 1$: (Beachte $\partial_i u$ ist harmonisch.) Mit der Mittelwerteigenschaft und Korollar III.2 folgt dann

$$|\partial_i u(\mathbf{x}_0)| = \left| \int_{B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2})} \partial_i u \right| = \left| \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2})} uv_i \right| \leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2}))}.$$

Hierbei haben wir in letzten Schritt $|\partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2})| = \frac{r\alpha(n)}{2^n}$ verwendet. Wegen $x \in \partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2})$ folgt $B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{2}) \subseteq B(\mathbf{x}_0, r) \subseteq \Omega$.

$$\Rightarrow |u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))}.$$

$$\Rightarrow |\partial_i u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{2n}{r\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))} = \frac{n}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^{n+1} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))}.$$

Die Behauptung gelte nun für $k-1$. Dann gilt für α mit $|\alpha| = k$, dass $D^\alpha u = \partial_i D^\beta u$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und β mit $|\beta| = k-1$. Wie oben gilt

$$|\nabla^\alpha u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{k}))}$$

und für $x \in \partial B(\mathbf{x}_0, \frac{r}{k})$ gilt $B(\mathbf{x}, \frac{k-1}{k}r) \subseteq B(\mathbf{x}_0, r) \subseteq \Omega$. Wie oben folgt mit (ÜA)

$$\left| (D^\beta u)(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n) \left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))},$$

$$|(\nabla^\alpha u)(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))}.$$

III.5. Liouville

Theorem III.12. Sei $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.

Beweis:. Sei $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Dann folgt mit Satz III.11

$$|(\nabla u)(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))} \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \alpha(n)r^n \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{C}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $|(\nabla u)(\mathbf{x}_0)| = 0$ folgt für $r \rightarrow \infty$. Dann ist u konstant.

III.6. Analytische versus harmonische Funktionen

Theorem III.13. Sei u harmonisch in Ω , d.h. für alle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ existiert ein $x > 0$, sodass

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n}{n!} (D^\alpha u)(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r).$$

Beweis:. Beweisidee: Zeige mithilfe von III.11, dass die Taylorreihe konvergiert. (ÜA)

III.7. Harnack-Ungleichung

Theorem III.14. Sei $V \subset\subset \Omega$ zusammenhängend. Dann existiert ein $C > 0$, welches nur von V abhängt, sodass

$$\sup_{\mathbf{x} \in V} u(\mathbf{x}) \leq C \inf_{\mathbf{x} \in V} u(\mathbf{x})$$

für alle nicht-negativen harmonischen Funktionen $u \in C^2(\Omega)$ gilt. Insbesondere ist für alle $x, y \in V$ erfüllt:

$$\frac{1}{C} \cdot u(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x}) \leq C \cdot u(\mathbf{y}).$$

Beweis:. Sei $r := \frac{1}{4} \text{dist}(V, \partial\Omega)$. Wähle $x, y \in V$ mit $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &\stackrel{MWE}{=} \int_{B(\mathbf{x}, 2r)} u(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \geq \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(\mathbf{y}, r)} u(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} = \frac{1}{2^n} \int_{B(\mathbf{y}, r)} u(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \stackrel{MWE}{=} \frac{1}{2^n} u(\mathbf{y}). \\ &\Rightarrow 2^n u(\mathbf{y}) \geq u(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2^n} u(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r. \end{aligned}$$

Überdecke \bar{V} mit endlich vielen Kugeln mit Radius $\frac{r}{2}$. ($V \subset\subset \Omega$) und $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ für $i = 2, \dots, N$. Dann folgt $u(x) \geq \frac{1}{2^{nN}} u(y)$ für alle $x, y \in V$.

In den folgenden Abschnitten werden wir eine Darstellung der Lösung der *Poisson-Gleichung*

$$\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n \tag{III.7}$$

der Form $u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = (k * f)(\mathbf{x})$ mit einer geeigneten Funktion k herleiten. Die Funktion k heißt *Fundamentallösung*. Im nächsten Abschnitt diskutieren wir zunächst einige benötigte Resultate aus der Distributionentheorie.

IV. Einführung in die Distributionentheorie

IV.1. Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$

In diesem Kapitel sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets offen. Wir setzen

$$D(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \text{ ist kompakt}\} = C_c^\infty(\Omega).$$

Eine Funktion $\varphi \in D(\Omega)$ heiße Testfunktion.

Beispiel IV.1. φ definiert über

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|\mathbf{x}\|^2}}, & \|\mathbf{x}\| < 1, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| \geq 1, \end{cases}$$

ist eine Testfunktion mit $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Definition & Lemma IV.2. Sei $(\varphi_j) \in D(\Omega)$ und $\varphi \in D(\Omega)$. Dann ist $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = \varphi$ in $D(\Omega) : \Leftrightarrow$

- (i) $\exists K \Subset \Omega$ mit $\text{supp } \varphi_j \subset K$, $j \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\lim_{j \rightarrow \infty} \|D^\alpha(\varphi_j - \varphi)\| = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Theorem IV.3. Seien $(\varphi_j), (\psi_j) \subset D(\Omega)$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = \varphi$ und $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = \psi$ für $\varphi, \psi \in D(\Omega)$. Dann gilt

- (a) $\lim_{j \rightarrow \infty} (\alpha\varphi_j + \beta\psi_j) = \alpha\varphi + \beta\psi$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- (b) $\lim_{j \rightarrow \infty} \nabla^\alpha \varphi_j = \nabla^\alpha \varphi$, für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, d.h. $\nabla^\alpha : D(\Omega) \rightarrow D(\Omega)$ ist stetig.

Definition & Lemma IV.4. Setze $D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} : T \text{ linear und stetig}\}$, wobei

$$T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig} : \Leftrightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = \varphi \text{ in } D(\Omega) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} T\varphi_j = T\varphi.$$

Wir schreiben

$$\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi).$$

$T \in D'(\Omega)$ heißt Distribution.

IV. Einführung in die Distributionentheorie

Theorem IV.5. Sei $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ linear. Dann sind äquivalent:

- (a) $T \in D'(\Omega)$,
- (b) $\forall K \Subset \Omega \exists C > 0, N(K, T) : |T\varphi| \leq C \cdot \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty, \varphi \in D(\Omega)$
 mit $\text{supp } \varphi_N \subset K$.

Beweis: (a) \Rightarrow (b):

Annahme: Die Behauptung ist falsch. Dann existiert $K \Subset \Omega$ so, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_N \in D(\Omega)$ mit

$$\text{supp } \varphi_N \subset K \text{ und } |T\varphi_N| > N \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi_N\|_\infty$$

existiert. Setze $\phi_N = \varphi_N / |T\varphi_N|$. Dann gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N = 0$, aber $|T\phi_N| = \frac{T\varphi_N}{|T\varphi_N|} = 1$, was einen Widerspruch zur Stetigkeit darstellt.

(b) \Rightarrow (a): (ÜA).

Bemerkung IV.6. In der Situation von Satz IV.5 heißt T von der Ordnung N auf K . Fall T von der Ordnung N ist für alle $K \subset \Omega$ kompakt, so heißt T von der Ordnung N auf Ω .

Beispiel IV.7. (a) Die Dirac'sche δ_a -Distribution. Für $a \in \Omega$ setze $\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a)$, $\varphi \in D(\Omega)$. Falls $0 \in \Omega$ schreiben wir $\delta_0 = \delta$.

(b) Der Cauchy-Hauptwert.

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\left\langle (pv)\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Beachte: $\frac{1}{x} \notin L_{loc}(\mathbb{R})$.

(c) Sei $\Omega = \mathbb{R}$. $\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\epsilon} \varphi(x) dx$.

(d) Für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ist $T_f : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert über

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Beweis: (b) Sei $(\varphi_j) \subset D(\Omega)$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = 0$. Dann existiert ein $a > 0$, sodass $\text{supp } \varphi \subseteq [-a, a]$, $j \in \mathbb{N}$. Es gilt nun

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\varphi_j(0) \int_{\epsilon \leq |x| \leq a} \frac{1}{x} dx + \int_{\epsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx \right]$$

IV.2. Elementare Operationen mit Distributionen

$$\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^0 \|\varphi'_j\|_{\infty} dx = 2a \|\varphi'_j\|_{\infty} \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

(d) Sei $(\varphi_j) \subset D(\Omega)$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = 0$ in $D(\Omega)$. Dann existiert ein $K \subset \Omega$ kompakt mit $\text{supp } \varphi_j \subset K$, $j \in \mathbb{N}$ und $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{\infty} = 0$. Weiter gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\langle T_f, \varphi_j \rangle| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int_K f \varphi_j dx \right| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{\infty} \int_K f dx = 0.$$

(a), (c) (ÜA).

Theorem IV.8. Es gilt $T_f = 0$ in $D'(\Omega)$ genau dann, wenn $f \equiv 0$ fast überall.

Beweis:. Die Rückrichtung ist klar.

' \Rightarrow ': Sei $T_f = 0$ in $D'(\Omega)$. Dann gilt für $K \subset \subset \Omega$, dass $\int_K f \varphi dx = 0$, $\varphi \in C_c^{\infty}(K)$. Da $f \in D'(K)$ folgt $f \equiv 0$ fast überall (ÜA).

IV.2. Elementare Operationen mit Distributionen

IV.2.1. Multiplikation mit einer Funktion

Sei $a \in C^{\infty}(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$. Wir definieren $\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle$, $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

Beispiel IV.9. (a) Sei $a \in C^{\infty}(\Omega)$ mit $0 \in \Omega$. Dann gilt $a\delta = a(0)\delta$, denn

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = \langle a(0)\delta, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\Omega).$$

(b) Es gilt $xpv(\frac{1}{x}) = T_{\mathbb{1}}$, denn

$$\left\langle xpv\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle pv\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{1}{x} x \varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1} \varphi = \langle T_{\mathbb{1}}, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

IV.2.2. Ableitung der Distribution

Nach Satz IV.3 (b) ist $\nabla^{\alpha} : D(\Omega) \rightarrow D(\Omega)$ stetig. Wir definieren für $T \in D'(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\langle \nabla^{\alpha} T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \nabla^{\alpha} \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\Omega). \quad (\text{IV.1})$$

Bemerkung IV.10. (a) Sei $f \in C^{\infty}(\Omega)$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, dass

$$\langle \nabla^{\alpha} T_f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, \nabla^{\alpha} \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f \nabla^{\alpha} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (\nabla^{\alpha} f) \varphi = \langle T_{\nabla^{\alpha} f}, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\Omega).$$

(b) $\nabla^{\alpha} \in \mathcal{L}(D'(\Omega))$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, da ∇^{α} linear und stetig ist. (ÜA)

IV. Einführung in die Distributionentheorie

(c) Leibnitz-Regel

Sei $a \in C^\infty(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$. Dann gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, dass $aT \in D'(\Omega)$ und

$$\nabla^\alpha(aT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\nabla^\beta a)(\nabla^{\alpha-\beta} T).$$

(d) Sei $f \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gilt $\nabla^\alpha T_f = T_{\nabla^\alpha f}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$.

Beispiel IV.11. (a) Die Heaviside-Funktion

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ist ein Element aus $D'(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = -\varphi(x)|_0^\infty \\ &= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gilt

$$\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha \varphi)(0), \quad \varphi \in D(\Omega).$$

(c) $(\log(|x|))' = \text{pv}(\frac{1}{x})$, denn

$$\begin{aligned} \langle (\ln(|x|))', \varphi \rangle &= -\langle \ln(|x|), \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln(|x|) \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(|x|) \varphi'(x) dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \ln(|x|) \varphi'(x) dx \right) \\ &\stackrel{PI}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} -\frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi'(-\epsilon) \ln(\epsilon) + \varphi'(\epsilon) \ln(\epsilon) \right) \\ &\stackrel{MWS}{=} \lim_{\eta \in (-\epsilon, \epsilon)} \left\langle \text{pv}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln(\epsilon) 2\epsilon \varphi''(\eta)] = \left\langle \text{pv}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle, \quad \varphi \in D(\Omega). \end{aligned}$$

IV.2.3. Der adjungierte Operator

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle AT, \varphi \rangle &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha T, \varphi \right\rangle \stackrel{\text{IV.1}}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle T, a_\alpha D^\alpha \varphi \rangle = \left\langle T, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \varphi \right\rangle \\ &= \langle T, A^* \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

$A^* := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ heißt der zu A *adjungierte Operator*.

Beispiel IV.12. $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$. Dann gilt $\Delta = \Delta^*$.

IV.3. Faltung

Für $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ sei $(\tau_{\mathbf{a}}\varphi)(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Wir definieren die Translation von $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \tau_{\mathbf{a}}T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-\mathbf{a}}\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Weiter sei $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(-\mathbf{x})$ für $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Spiegelung.

Definition IV.13. Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren die Faltung $T * \varphi$ via

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle.$$

Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt (ÜA)

$$(f * g)(x) = T_f(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}g).$$

Beispiel IV.14. *Es gilt*

$$(\delta * \varphi)(\mathbf{x}) = \langle \delta, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle = (\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi)(0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

d.h. $\delta * \varphi = \varphi$.

Theorem IV.15. *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\partial_j(T * \varphi) = (\partial_j T) * \varphi = T * (\partial_j \varphi), j = 1, \dots, n$.*

IV. Einführung in die Distributionentheorie

Beweis:. Schritt 1: $T * \varphi$ ist stetig

Für $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi(\mathbf{y}) - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere folgt:

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi = \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \text{ d.h.}$$

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi \rangle = \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle.$$

Also

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} (T * \varphi)(\mathbf{x}') = (T * \varphi)(\mathbf{x}).$$

Schritt 2:

Sei $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt für $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = \frac{1}{h}[\varphi(\mathbf{x} + he_i - \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y})], \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), i = 1, \dots, n.$$

Also:

$$\begin{aligned} \partial_i(T * \varphi)(\mathbf{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \langle T, \frac{1}{h}\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle \\ &= \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) \rangle \\ &= (T * (\partial_i\varphi))(\mathbf{x}), i = 1, \dots, n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_i(T * \varphi)(\mathbf{x}) = (T * \partial_i\varphi)(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

$$\Rightarrow \partial_i(T * \varphi) \text{ stetig in } \mathbb{R}^n.$$

$$\Rightarrow T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Schritt 3:

Wegen

$$\partial_{\mathbf{y}_i}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_{\mathbf{x}_i}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n$$

folgt

$$\partial_{\mathbf{x}_i}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = -\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_{\mathbf{x}_i}\varphi) \quad i = 1, \dots, n$$

und damit

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}_i}(T * \varphi)(\mathbf{x}) &= (T * \partial_i\varphi)(\mathbf{x}) = \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) \rangle = -\langle T, \partial_{\mathbf{x}_i}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) \rangle \\ &= \langle \partial_i T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle = ((\partial_i T) * \varphi)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

IV.4. Fundamentallösung

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$. Dann gilt für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

ist eine Lösung im Sinne von Distributionen, da

$$Au = A(T * f) = (AT * f) = (\delta * f) = f.$$

Definition IV.16. Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$. Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$ heißt *Fundamentallösung* von A in \mathbb{R}^n .

V. Fundamentallösungen

In diesem Abschnitt berechnen wir einige Fundamentallösungen explizit. Im Allgemeinen kann man allerdings nicht erwarten, dass eine Fundamentallösung explizit berechnet werden kann.

Theorem V.1 (Laplace-Operator). Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ setze

$$N(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)} |\mathbf{x}|^{2-n} & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x}| & n = 2 \\ \frac{1}{2} |\mathbf{x}| & n = 1 \end{cases}$$

Dann ist $N \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\Delta N = \delta \text{ (i. S. v. Distributionen).}$$

Beweis:. Sei $n \geq 3$. Für $\epsilon > 0$ setze

$$N^\epsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{2-n}{2}}.$$

Dann gilt: $N^\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\begin{aligned} \partial_j N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{2-n}{2}-1} \frac{2-n}{2} 2\mathbf{x}_j = \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}} \mathbf{x}_j \\ \partial_j^2 N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{n}{2} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} 2\mathbf{x}_j \mathbf{x}_j + \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}} \\ &= \frac{-1}{\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} \mathbf{x}_j^2 + \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}} \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} [-n\mathbf{x}_j^2 + (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)], \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Mit Lebesgue folgt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle N - N^\epsilon, \Delta \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Weiter gilt

$$\langle N^\epsilon, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} N^\epsilon \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta N^\epsilon) \varphi, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

V. Fundamentallösungen

und

$$\begin{aligned}\Delta N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \partial_i^2 N^\epsilon(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon)^{\frac{-n}{2}-1} [-n|\mathbf{x}|^2 + n|\mathbf{x}|^2 + n\epsilon^2] \\ &= \frac{1}{\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} \epsilon^2 =: \rho^\epsilon(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1}{\epsilon^n} \rho^1\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{\alpha(n)} \left(\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}\right)^2 + 1\right)^{\frac{-n}{2}-1} = \frac{1}{\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} \epsilon^2 = \rho^\epsilon(x)$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \rho^1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\alpha(n)} (|\mathbf{y}|^2 + 1)^{\frac{-n}{2}-1} \, d\mathbf{y} = \int_0^\infty n \frac{r^{n-1}}{(r^2 + 1)^{\frac{n}{2}+1}} \, dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty n \frac{s^{\frac{n-2}{2}}}{(s+1)^{\frac{n}{2}+1}} \, ds = \frac{n}{2} \beta\left(\frac{n}{2}, 1\right) = \frac{n}{2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = 1\end{aligned}$$

ist f^ϵ ist ein Mollifier. Daraus folgt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon(-\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Fall $n=1,2$ (ÜA).

Theorem V.2. (Wellengleichung) Sei $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert über

$$E(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t > |x| \\ 0 & t \leq |x| \end{cases}.$$

Dann ist $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\partial_t^2 E - \partial_x^2 E = \delta.$$

Beweis.. (ÜA)

VI. Greenfunktionen

In diesem Abschnitt sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ stets offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{in } \Omega, \\ u &= g, & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{VI.1}$$

VI.1. Herleitung der Greenfunktion

Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ beliebig und seien $\mathbf{x} \in \Omega$ und $\epsilon > 0$ so, dass $B(\mathbf{x}, \epsilon) \subset \Omega$. Weiter sei N die Fundamentallösung des Δ und $V_\epsilon := \Omega \setminus B(\mathbf{x}, \epsilon)$. Mit der Green'schen Formel folgt:

$$\int_{V_\epsilon} u(\mathbf{y})(\Delta N)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - N(\mathbf{y} - \mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \tag{VI.2}$$

$$= \int_{\partial V_\epsilon} u(\mathbf{y})\partial_\nu N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - N(\mathbf{y} - \mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \tag{VI.3}$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale auf ∂V_ϵ ist.

Wegen $\Delta N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$ für $x \neq y$ ergibt sich mit der Darstellung der Fundamentallösung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} N(\mathbf{y} - \mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right| &\leq c\epsilon^{n-1} \max_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} |N| \\ &\leq c\epsilon^{n-1} \begin{cases} \epsilon^{2-n} & n \geq 3 \\ |\log \epsilon| & n = 2 \\ |\epsilon| & n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

VI. Greenfunktionen

Weiterhin gilt $\nabla N(\mathbf{y}) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n}$ für $y \neq 0$ (Ü.A.) und es folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} u(\mathbf{y}) \partial_\nu N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, dS(\mathbf{y}) &= - \int_{\partial B(0, \epsilon)} u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \nu \cdot \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n} \, dS(\mathbf{y}) \\
 &= \int_{\partial B(0, \epsilon)} u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \cdot \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n} \, dS(\mathbf{y}) \\
 &= \int_{\partial B(0, \epsilon)} u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{y}|^{n-1}} \, dS(\mathbf{y}) \\
 &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0, \epsilon)} u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\
 &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Damit können wir in (VI.2) zum Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ übergehen und erhalten:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \partial_\nu N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, dS(\mathbf{y}) - \int_{\Omega} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) \, dy. \quad (\text{VI.4})$$

Gleichung (VI.4) erlaubt uns u zu bestimmen, falls wir Δu in Ω und $u, \partial_\nu u$ auf $\partial\Omega$ kennen. Leider gibt uns (VI.1) keine Informationen über $\partial_\nu u$ auf $\partial\Omega$. Wir würden allerdings unsere PDE überbestimmen, wenn wir die Werte von $\partial_\nu u$ auf $\partial\Omega$ zusätzlich vorschreiben würden. Daher gehen wir folgender Idee nach:

Idee. Finde für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ eine Funktion $N^\mathbf{x} = N^\mathbf{x}(\mathbf{y})$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
 \Delta N^\mathbf{x} &= 0, & \text{in } \Omega, \\
 N^\mathbf{x} &= N(\mathbf{y} - \mathbf{x}), & \text{auf } \partial\Omega.
 \end{aligned}$$

Angenommen wir haben eine solche Funktion bereits gefunden. Mit den Greenschen Formeln folgt dann

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \partial_\nu N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) - N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\
 &= \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \partial_\nu N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) - N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y})
 \end{aligned}$$

und damit erhalten wir aus (VI.4) die Darstellung

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \partial_\nu N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, dS(\mathbf{y}) - \int_{\Omega} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) + \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \partial_\nu N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) + \int_{\Omega} N^\mathbf{x}(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\
 &= - \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \partial_\nu (N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - N^\mathbf{x}(\mathbf{y})) \, dS(\mathbf{y}) - \int_{\Omega} (N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - N^\mathbf{x}(\mathbf{y})) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},
 \end{aligned}$$

welche den ungeliebten Term $\partial_\nu u$ nicht mehr enthält. Diese führt uns zur Definition der Greenfunktion.

Definition VI.1. Die Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - N^\mathbf{x}(\mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, heißt *Greenfunktion in Ω* . Setzen wir die Definition von G in obige Darstellung von u ein, so sehen wir, dass in diesem Fall ist die Lösung von (VI.1) durch

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{y}) \partial_\nu G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{VI.5})$$

gegeben ist.

Bemerkung VI.2. Sei $\mathbf{x} \in \Omega$. Dann erfüllt $G_\mathbf{x}(\mathbf{y}) := G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
 -\Delta G_\mathbf{x} &= \delta_\mathbf{x}, & \text{in } \Omega, \\
 G_\mathbf{x} &= 0 & \text{auf } \partial\Omega.
 \end{aligned}$$

Beweis:.. Ü.A.

VI.2. Eigenschaften der Greenfunktion

Theorem VI.3. Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ gilt $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Beweis:.. Wir schreiben $G_\mathbf{x}(\mathbf{z}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ und $G_\mathbf{y}(\mathbf{z}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ für $\mathbf{z} \in \Omega$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta G_\mathbf{x} &= 0, & z \neq x, \\
 \Delta G_\mathbf{y} &= 0, & z \neq y, \\
 G_\mathbf{x}(\mathbf{z}) &= G_\mathbf{y}(\mathbf{z}) = 0, & \text{auf } \partial\Omega.
 \end{aligned}$$

Setze $V = \Omega \setminus \{B(\mathbf{x}, \epsilon) \cup B(\mathbf{y}, \epsilon)\}$ für $\epsilon > 0$ klein genug. Mit den Greenschen Formeln und obigen Eigenschaften von $G_\mathbf{x}$ und $G_\mathbf{y}$ folgt:

$$\int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} (\partial_\nu G_\mathbf{x}) G_\mathbf{y} - (\partial_\nu G_\mathbf{y}) G_\mathbf{x} \, dS(\mathbf{z}) = \int_{\partial B(\mathbf{y}, \epsilon)} (\partial_\nu G_\mathbf{y}) G_\mathbf{x} - (\partial_\nu G_\mathbf{x}) G_\mathbf{y} \, dS(\mathbf{z}).$$

VI. Greenfunktionen

Da $G_{\mathbf{y}}$ glatt nahe bei \mathbf{x} ist, gilt analog zu Abschnitt VI.1.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} (\partial_{\nu} G_{\mathbf{y}}) G_{\mathbf{x}} \, dS(\mathbf{z}) \right| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} c \epsilon^{n-1} \sup_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} |G_{\mathbf{x}}| = 0$$

und da $G_{\mathbf{x}} = N(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - N^{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ mit $N^{\mathbf{x}}$ glatt in Ω gilt, erhalten wir mit der aus Abschnitt VI.1 bekannten Rechnung:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} (\partial_{\nu} G_{\mathbf{x}}) G_{\mathbf{y}} \, dS(\mathbf{z}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} \partial_{\nu} N(\mathbf{x} - \mathbf{z}) G_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}).$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} (\partial_{\nu} G_{\mathbf{x}}) G_{\mathbf{y}} - (\partial_{\nu} G_{\mathbf{y}}) G_{\mathbf{x}} \, dS(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

und völlig analog natürlich auch

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{y}, \epsilon)} (\partial_{\nu} G_{\mathbf{y}}) G_{\mathbf{x}} - (\partial_{\nu} G_{\mathbf{x}}) G_{\mathbf{y}} \, dS(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Erinnern wir uns jetzt noch daran, dass nach dem ersten Schritt des Beweis beide Linsen gleich sind, folgt wie gewünscht $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

VI.3. Die Greenfunktion im Halbraum

In diesem Abschnitt bezeichne N wieder die Fundamentallösung von Δ in \mathbb{R}^n . Wie in Abschnitt VI.1 gezeigt, müssen wir für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ eine Funktion $N^{\mathbf{x}} = N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta N^{\mathbf{x}} &= 0, & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ N^{\mathbf{x}} &= N(\mathbf{y} - \mathbf{x}), & \text{auf } \partial \mathbb{R}_+^n, \end{aligned}$$

bestimmen, um die Greenfunktion im Halbraum angeben zu können.

Idee (Reflexion). Setze $N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = N(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$, wobei $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ die Spiegelung von x an $\partial \mathbb{R}_+^n$ ist.

Wegen $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+^n$ gilt damit $\Delta N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Delta_{\mathbf{y}} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$ und nach Definition gilt $N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = N(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = N(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ für $\mathbf{y} \in \partial \mathbb{R}_+^n$. Diese Beobachtung liefert uns unmittelbar

Theorem VI.4. Die Greenfunktion in \mathbb{R}_+^n ist $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = N(\mathbf{y} - \mathbf{y}) - N(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Beweis:. *Ü.A.*

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ u &= g, & \text{auf } \partial\mathbb{R}_+^n. \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

Eine direkte Rechnung zeigt zunächst:

$$\partial_{y_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_{y_n} N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \partial_{y_n} N(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \left[\frac{y_n - x_n}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|^n} \right].$$

Damit folgt

$$\partial_\nu G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\partial_{y_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}, \quad \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n,$$

und Formel (VI.5) liefert eine Darstellung der Lösung u von (VI.6) :

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n. \quad (\text{VI.7})$$

Die Funktion $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}$ definiert für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$ heißt *Poissonkern*. Es gilt nun

Theorem VI.5. *Sei $g \in BC(\mathbb{R}^{n-1})$ und u durch (VI.7) gegeben. Dann gilt*

- (a) $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$.
- (b) $\Delta u = 0$ in \mathbb{R}_+^n .
- (c) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0)$ für $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^n$.

Beweis:. *Wir unterteilen den Beweis in 3 Schritte.*

Schritt 1: Sei $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$ fest. Dann ist $\mathbf{y} \mapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ harmonisch für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{x}\}$. Wegen Satz VI.3 gilt $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, so dass für $\mathbf{y} \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$ die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ harmonisch für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{y}\}$. Insbesondere ist $\mathbf{x} \mapsto K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\partial_{y_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ harmonisch für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$.

Schritt 2: Es gilt (*Ü.A. für Freunde des Rechnens*):

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1.$$

Insbesondere erhalten wir für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ die Abschätzung

$$|u(\mathbf{x})| = \left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)} \|K(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(\partial\mathbb{R}_+^n)} = \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)}.$$

VI. Greenfunktionen

Dies liefert uns $\|u\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)} \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)}$. Da $\mathbf{x} \mapsto K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ harmonisch für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$ folgt $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ (Ü.A.). Daher gilt

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \Delta_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n.$$

Es bleibt also nur noch (c) zu zeigen.

Schritt 3: Sei $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$ und $\epsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ derart, dass für alle $|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$ für $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$ mit $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| \leq \delta$ gilt. Damit folgt:

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| &= \left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)] \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)] \, d\mathbf{y} \right| \\ &\quad + \left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)] \, d\mathbf{y} \right| \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Nach Wahl von δ gilt

$$I_1 \leq \epsilon \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \epsilon.$$

Den zweiten Term schätzen wir für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ mit $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ durch

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2 \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &\leq 2 \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)} \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)} \frac{2^n}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|^n} \, d\mathbf{y} = cx_n \end{aligned}$$

ab, wobei wir genutzt haben, dass für \mathbf{x} wie oben und $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)$ nach umgekehrter Dreiecksungleichung $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq \frac{1}{2} |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|$ gilt. Für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ folgt somit $I_1 + I_2 \rightarrow 0$ und wir haben auch (c) nachgewiesen.

VII. Allgemeinere Differentialoperatoren

In diesem Abschnitt stellen wir einige allgemeine Resultate über Fundamentallösungen dar. Ihre Beweise würden allerdings den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.

Theorem VII.1. (Malgrange-Ehrenpreis, siehe [Ehr54], [Ehr55], [Mal54], [Mal56]) Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$ auf \mathbb{R}^n . Dann existiert eine Fundamentallösung für A .

Beweis: ohne Beweis.

Betrachte einen Differentialoperator L der Form

$$Lu = \partial_t u - A(t, x, \nabla_x u)u$$

mit $A(t, x, \nabla_x u) = \sum_{|k|=2m} a_k(t, x) \nabla_x^k + \sum_{|k| < 2m} a_k(t, x) \nabla_x^k$, $a_k \in C^{l+\alpha, (2+\alpha)2m}(Q)$, wobei $Q = [0, T_0] \times \bar{\Omega}$, für ein $l \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{2m+l+\alpha}$. Wir betrachten für $\tau \geq 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, \mathbf{x}) - A(t, \mathbf{x}, \nabla_x u)u(t, \mathbf{x}) &= f(t, \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, t > \tau, \\ u(t, \mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > \tau, \\ u(\tau, \mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (\text{VII.1})$$

Definition VII.2. (a) Sei A wie oben. Dann heißt A gleichmäßig *elliptisch*, falls $\sum_{|k|=2m} a_k(t, \mathbf{x}) \xi_{k_1} \dots \xi_{k_n} \geq \alpha_0 |\xi|^{2m}$ mit $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t \in [0, T_0]$, $\mathbf{x} \in \Omega$ für ein $\alpha_0 > 0$.

(b) Sei L wie oben. Dann heißt L (gleichmäßig) *parabolisch* falls A gleichmäßig elliptisch ist.

Die Greenfunktion von (VII.1) ist dann über

$$\begin{aligned} \partial_t G(t, \mathbf{x}, \tau, \xi) - A(t, \mathbf{x}, \nabla_x u)G(t, \mathbf{x}, \tau, \xi) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t > \tau, \\ u(t, \mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > \tau, \\ u(\tau, \mathbf{x}) &= \delta_\xi, & \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

definiert. Falls G existiert und schön genug ist, ist die Lösung u von (VII.1) durch

$$u(t, x) := \int_0^t \int_\Omega G(t, \mathbf{x}, \tau, \xi) f(\tau, \xi) \, d\xi \, d\tau + \int_\Omega G(t, \mathbf{x}, \tau, \xi) u(\xi) \, d\xi, \quad t > \tau, x \in \Omega,$$

gegeben.

VII. Allgemeiner Differentialoperatoren

Theorem VII.3 ([ÉdI70]). *Sei L gleichmäßig parabolisch. Dann existiert eine Greenfunktion $G : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ von Problem (VII.1). Dann existieren $C, c > 0$:*

$$\begin{aligned} \left| \partial_t^{k_0} \nabla_{\mathbf{x}}^k G(t, \mathbf{x}, \tau, \xi) \right| &\leq C(t - \tau)^{-\frac{n+2mk_0+|k|}{2m}} e^{-c\left(\frac{|\mathbf{x}-\xi|^{2m}}{|t-\tau|}\right)^{\frac{1}{q}}}, \\ &2mk_0 + |k| < 2m + l, \quad (t, \mathbf{x}), (\tau, \xi) \in Q, \\ \left| \partial_t^{k_0} \nabla_{\mathbf{x}}^l G(t, \mathbf{x}, \tau, \xi) - \partial_t^{k_0} \nabla_{\mathbf{x}}^l G(t, \mathbf{x}_0, \tau, \xi) \right| &\leq C|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha (t - \tau)^{-\frac{n+2mk_0+l+\alpha}{2m}} e^{-c\left(\frac{|\mathbf{x}^*-\xi|^{2m}}{|t-\tau|}\right)^{\frac{1}{q}}}, \\ &(t, \mathbf{x}), (\tau, \xi), (t, \mathbf{x}_0) \in Q \in Q, \end{aligned}$$

Hier: $|\mathbf{x}^* - \xi| = \min\{|\mathbf{x} - \xi|, |\mathbf{x}_0 - \xi|\}$, $q = 2m - 1$.

Beweis: Ohne Beweis.

Beispiel VII.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und $A = \Delta$. Dann gilt*

$$\left| \partial_t^{k_0} \nabla_{\mathbf{x}}^k G(t, \mathbf{x}, \tau, \xi) \right| \leq C(t - \tau)^{-\frac{n+|k|}{2} - k_0} e^{-c\frac{|\mathbf{x}-\xi|^2}{|t-\tau|}}, \quad (t, \mathbf{x}), (\tau, \xi) \in Q.$$

Beweis: ÜA

Theorem VII.5 ([ÉdI70]). *Sei A gleichmäßig elliptisch und unabhängig von t . dann genügt die Greenfunktion G_λ von*

$$\begin{aligned} (\lambda - A)u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

der Abschätzung

$$\left| \nabla_{\mathbf{x}}^k G_\lambda(\mathbf{x}, \xi) \right| \leq C e^{-l_0(\operatorname{Re}\lambda - B)\frac{1}{2m}|\mathbf{x}-\xi|} \begin{cases} 1 & \text{falls } n + |k| < 2m, \\ 1 + |\log |\mathbf{x} - \xi|| & \text{falls } n + |k| = 2m, \\ |\mathbf{x} - \xi|^{n-|k|+2m} & \text{falls } n + |k| > 2m, \end{cases}$$

für $l_0, B > 0$ und $\operatorname{Re}\lambda > B$.

Beweis: ohne Beweis

VIII. Temperierte Distributionen

In diesem Abschnitt definieren wir die Fouriertransformation auf den temperierte Distributionen $S'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$.

VIII.1. Der Raum der schnell-fallenden Funktionen

Wir setzen

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

S heißt *Raum der schnell-fallenden Funktionen*. Im Folgenden setzen wir $\|f\|_m = \sup_{\{|\alpha| \leq m, |\alpha| \leq m\}} \|f\|_{\alpha,\beta}$.

Definition VIII.1. $(f_j) \subset S(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen f in $S(\mathbb{R}^n)$ genau dann wenn $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung VIII.2. (a) S ist ein Fréchetraum.

(b) $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$.

(c) $\mathbf{x} \mapsto e^{-|\mathbf{x}|^2} \in S(\mathbb{R}^n) \setminus D(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: ÜA

Die Fouriertransformation ist auf S über

$$(\mathcal{F}u)(\xi) := \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

definiert.

Theorem VIII.3. (a) $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n))$.

(b) $(\widehat{\nabla^\alpha u})(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

(c) $(-\widehat{(i\mathbf{x})^\alpha u})(\xi) = (\nabla^\alpha \hat{u})(\xi)$.

(d) $\mathcal{F} : S \rightarrow S$ ist ein Isomorphismus und

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(\xi) = \check{u}(\xi) = (2\pi)^n \hat{u}(-\xi)$$

(e) Für $f, g \in S$ gilt $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

(f) Für $f, g \in S$ gilt $\widehat{f \hat{g}} = (\frac{1}{2\pi})^n \hat{f} * \hat{g}$.

(g) Für $f, g \in S$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} = (\frac{1}{2\pi})^n \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \overline{\hat{g}}$.

Beweis: siehe Funktionalanalysis, ÜA.

VIII.2. Temperierte Distributionen

Wir definieren den Raum der temperierten Distributionen über $S'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(S, \mathbb{C})$.

Theorem VIII.4. Sei $T : S \rightarrow \mathbb{C}$ linear. Dann sind äquivalent:

(a) $T \in S'(\mathbb{R}^n)$

(b) Es existiert $m \in \mathbb{N}_0, C > 0$:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_m, \quad \varphi \in S.$$

Beweis. \Rightarrow : Annahme: Die Behauptung ist falsch. Dann existiert für alle $m \in \mathbb{N}$ ein φ_m mit $\|\varphi_m\| \leq 1/m$ und $|\langle T, \varphi_m \rangle| = 1$. Es gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m = 0$ in $S(\mathbb{R}^n)$, aber $\lim_{m \rightarrow \infty} |\langle T, \varphi_m \rangle| = 1$. Das ist ein Widerspruch zu (a).

\Leftarrow : klar (Betrachte Nullfolge).

Definition VIII.5. Seien $T_j, T \in S'(\mathbb{R}^n), j \in \mathbb{N}$. Wir sagen $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T$ in S' wenn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Theorem VIII.6. Sei $p \in [1, \infty]$. Dann gilt:

$$D(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$$

Beweis. $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$: klar

$D(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} S(\mathbb{R}^n)$: ÜA

$S(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$: Für $p \in [1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|)^{n+1}} (f(\mathbf{x})(1 + |\mathbf{x}|)^{(n+1)/p})^p dx \\ &\leq \|f\|_{n+1}^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|)^{n+1}} dx, \leq C \|f\|_{n+1}^p, \quad f \in S. \end{aligned}$$

$p = \infty$ klar.

Weiter gilt $L^{p'}(\mathbb{R}^n) = (L^p(\mathbb{R}^n))' \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ für $p \in [1, \infty)$, Der Fall $p = \infty$ lässt sich durch Nachrechnen zeigen.

Wegen $D(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} S(\mathbb{R}^n)$ folgt $S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$.

Index

- adjungierter Operator, 33
- Burgersgleichung, 11
- d'Alemberts Formel, 15
- Distribution
 - Cauchy-Hauptwert, 30
 - Dirac'sche δ_a -Distribution, 30
 - Heaviside-Funktion, 32
- Entropie-Bedingung, 13
- Euler-Poisson-Darboux-Gleichung, 16
- Fundamentallösung, 28, 35
- Greenfunktion, 41
- harmonisch, 23
- Integrallösung, 10
- Kirchhoff's Formel, 19
- Laplace-Gleichung, 23
- Leibnitz-Regel, 32
- linear, 1
- Mittelwerteigenschaft, 24
- nicht charakteristisch, 6
- Ordnung N auf Ω , 30
- Poisson-Gleichung, 28
- Poissonkern, 43
- quasi-linear, 1
- Rankine-Hugoniot-Bedingung, 11
- Schock, 13
- semi-linear, 1
- T von der Ordnung N auf K , 30
- Testfunktion, 10
- Unstetigkeitskurve, 10
- voll nicht-linear, 1
- zulässig, 6

Literaturverzeichnis

- [ÈdI70] S. D. Èĭ del'man and S. D. Ivasišen. Investigation of the Green's matrix of a homogeneous parabolic boundary value problem. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 23:179–234, 1970.
- [Ehr54] Leon Ehrenpreis. Solution of some problems of division. I. Division by a polynomial of derivation. *Amer. J. Math.*, 76:883–903, 1954.
- [Ehr55] Leon Ehrenpreis. Solution of some problems of division. II. Division by a punctual distribution. *Amer. J. Math.*, 77:286–292, 1955.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [Mal54] Bernard Malgrange. Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. II. Equations avec second membre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 238:196–198, 1954.
- [Mal56] Bernard Malgrange. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 6:271–355, 1955–1956.