Partielle Differentialgleichungen I

Matthias Geissert

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Wir betrachten einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung und wollen die Wärmeleitung untersuchen. Dazu treffen wir folgende Annahmen:

- Der Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall $[0,1]$ und $u(x,t)$ ist die Temperatur an der Stelle x zum Zeitpunkt t.
- Konstanten: ρ Dichte, c spezifische Wärme
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Wärmequelle
- Energie in Segment $[x_1, x_2] : E(x_1, x_2, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(x_1, t)$
- Sei $Q(x,t)$ die thermische Energie durch den Punkt x zum Zeitpunkt t und K_0 die thermale Konduktivität. Dann gilt
$$\frac{Q(x,t_2) - Q(x,t_1)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(x,t_1).$$
- Energieerhaltung:
$$c\rho(x_2 - x_1)(u(x_1,t_2) - u(x_1,t_1)) =$$
$$(t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u(x_1,t_1) - u(x_2,t_1)\right)\right).$$

Daraus folgt
$$\frac{u(x_1,t_2) - u(x_1,t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u(x_1,t_1) - u(x_2,t_1)}{x_1 - x_2}\right)$$
und somit
$$\partial_t u(x_1,t_1) = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_1,t_1), \tag{1}$$ eq:WLG

wobei $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ die Konstante der thermischen Diffusivität ist. Gleichung (1) heißt Wärmeleitungsgleichung. Bei stationärer Temperaturverteilung gilt $0 = \partial_t u(x,t)$ und damit
$$0 = f(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t).$$

Partielle Differentialgleichungen tauchen also in natürlicher Weise in Anwendungen auf. Im Rahmen dieser Vorlesung sind partielle Differentialgleichungen immer ohne Herleitung gegeben.

I. Einführung

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets ein Gebiet.

def:PDE **Definition I.1.**

$$F(D^k u(\mathbf{x}), D^{k-1}u(\mathbf{x}), ..., Du(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{I.1}$$ eq:PDE

heißt partielle Differentialgleichung (PDE) k-ter Ordnung.
Hier ist $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht.

Wir untersuchen folgende Typen von PDE's.

ef:typen **Definition I.2.** PDE (I.1) heißt

(a) *linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u - f(\mathbf{x}),$$

(b) *semi-linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, \mathbf{x})$$

für $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ und $a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben,

(c) *quasi-linear*, falls

$$F(D^k u(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, \mathbf{x}) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, \mathbf{x})$$

für $a_\alpha, a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben und

(d) *voll nicht-linear*, falls in der Situation von (c) a_α auch von $D^k u$ abhängt.

Später werden wir sehen, dass sich der semi- und der quasi-lineare Fall mit Hilfe eines Fixpunktarguments auf den linearen Fall reduzieren lassen, wobei der quasi-lineare Fall technisch schwieriger ist. Später werden wir auch weitere Typen linearer PDE's diskutieren.

ef:system **Definition I.3.**

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{I.2}$$

heißt System von PDE's k-ter Ordnung. Hier ist $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \cdots \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ gegeben und $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ gesucht.

Beispiel I.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.*

(a) Laplace Gleichung:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

(b) Transportgleichung:

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(c) Wärmeleitungsgleichung:

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(d) Wellengleichung:

$$\partial_t^2 u(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

(e) Navier-Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) + (\nabla_{\mathbf{x}} p)(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Hier ist $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *das gesuchte* Geschwindigkeitsfeld *und* $p : \Omega \to \mathbb{R}$ *der gesuchte* (Druck). *Die rechte Seite* $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *ist gegeben.*

Damit die PDE's eindeutig lösbar sind, müssen noch entsprechende Randbedingungen und/oder Anfangsbedingungen gefordert werden.

Typische Fragestellungen, die im Rahmen dieser Vorlesung untersucht werden sind:

(a) Existenz.

(b) Eindeutigkeit.

(c) Regularität.

(d) Abbildungsverhalten der Gleichung [1].

(e) Weitere Eigenschaften der Lösung.

In den folgenden Kapiteln diskutieren wir unterschiedliche Zugänge zur Beantwortung dieser Fragen. Leider lässt sich in nur wenigen Fällen die Lösung einer PDE explizit berechnen. Daher werden im Rahmen dieser Vorlesung sowohl "explizite" als auch abstrakte Methoden (welche zumindest erlauben, einige Aussagen über die Lösung zu treffen) vorgestellt.

[1] Beispielsweise besitzt $u - \Delta u = f$ genau dann eine eindeutige Lösung $u \in X$, wenn $f \in Y$, d.h. $(1 - \Delta) : X \to Y$ ist ein Isomorphismus.

II. Die Methode der Charakteristiken

II.1. Motivation anhand der Transportgleichung

ransport

Für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$\begin{aligned} \partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u &= 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), && \text{(II.1)} \\ u &= g, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. && \text{(II.2)} \end{aligned}$$

eq:tgl

eq:tglaw

Idee: Finde Weg $\mathbf{X}_{\mathbf{x_0}} : I \to \mathbb{R}^{n+1}_+$ entlang dem sich u durch Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE) berechnen lässt. Um die Notation zu erleichten setze im Folgenden $\mathbf{X}_{\mathbf{x_0}}(s) = \mathbf{X}(s)$ und $\partial_{n+1} = \partial_t$. Weiter sei

$$z(s) = u(\mathbf{X}(s)), \quad \mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{X}(s)), \quad z(0) = g(\mathbf{x_0}).$$

Dann folgt mit der Kettenregel

$$\dot{z}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} (\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{p}(s) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s). \tag{II.3}$$

eq:dz

Die Ableitung von $\mathbf{p}(s)$ ergibt komponentenweise erneut mit der Kettenregel

$$(\dot{\mathbf{p}}^i)(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u \\ \partial_t \partial_i u \end{pmatrix} (\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Aus (II.1) folgt $\partial_i \partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u = 0$ oder als Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} \partial_t \partial_i u \\ \nabla_{\mathbf{x}} \partial_i u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0.$$

Setze $\dot{\mathbf{X}}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h.

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{x_0} + s\mathbf{b} \\ s \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $\dot{\mathbf{p}}^i(s) = 0$. Mit

$$\mathbf{p}(0) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_i u \end{pmatrix} (\mathbf{x_0}, 0)$$

folgt $\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} u \\ \partial_i u \end{pmatrix} (\mathbf{x_0}, 0)$. Gleichung (II.3) impliziert nun

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} u)(\mathbf{x_0}, 0) + (\partial_t u)(\mathbf{x_0}, 0) \overset{\text{(II.1)}}{=} 0 \\ z(0) &= g(\mathbf{x_0}) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$u(\mathbf{x_0}, 0) \overset{\text{(II.2)}}{=} g(\mathbf{x_0}) = z(s) = u(\mathbf{X}(s)) = u(\mathbf{x_0} + \mathbf{b}s, s).$$

Mit $\mathbf{x} := \mathbf{x_0} + \mathbf{b}s$ folgt also $u(\mathbf{x}, s) = u(\mathbf{x} - \mathbf{b}s, 0) = g(\mathbf{x} - \mathbf{b}s)$. Insgesamt erhalten wir

thm:sol-tgl **Theorem II.1.** *Sei $k \in \mathbb{N}$, $g \in C^k(R^n)$. Dann löst*

$$u(\mathbf{x}, s) = g(\mathbf{x} - \mathbf{b}s) \in C^k(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$$

die Transportgleichung (II.1).

Bemerkung II.2. *u ist nicht glatter als g.*

II.2. Allgemeiner Fall

Betrachte nun beliebige PDE 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} F(Du(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \Gamma \end{aligned} \tag{II.4}$$

eq:2

Hierbei ist $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben und glatt.

II.2.1. Herleitung einer ODE für z(s), p(s), X(s)

Wir definieren:

$$\begin{aligned} z(s) &= u(\mathbf{X}(s)) \\ \mathbf{p}(s) &= (\nabla u)(\mathbf{X}(s)) \end{aligned}$$

und berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= (\nabla u)(\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{p}(s) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s) \\ \dot{\mathbf{p}}^i(s) &= (\nabla \partial_i u)(\mathbf{X}(s)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(s), \quad i = 1, .., n \end{aligned}$$

Ziel: Elimiere Ableitungen 2. Ordnung. Aus (II.4) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \partial_{\mathbf{p}_j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \partial_i \partial_j u + \partial_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \partial_i u \\ + \partial_i F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Also setze

$$\dot{\mathbf{X}}^j(s) = \partial_{\mathbf{p}_j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)), \quad j = 1, .., n$$

Dann gilt

$$\dot{\mathbf{p}}^i(s) = -\partial_{\mathbf{p}_i} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s))\mathbf{p}^i(s) - \partial_i F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)), \quad i = 1, .., n$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(s) &= -\partial_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s))\mathbf{p}(s) - D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \cdot (\nabla_{\mathbf{p}} F)(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \\ \dot{\mathbf{X}}(s) &= (\nabla_{\mathbf{p}} F)(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{X}(s)) \end{aligned} \tag{II.5}$$

eq:3

Insbesondere erfüllt jede Lösung $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$ von (II.4) das System (II.5) solange $x(s) \in \Omega$.

II.2.2. OBdA Rand von Ω 'lokal flach'

Rand von Ω flach bedeutet $\Gamma \cong \mathbb{R}^n_+$. In einer Umgebung $U \subset \Gamma$ von $x_0 \in \Gamma$ lässt sich Γ durch Schieben und Drehen in den Graph einer glatten 'kleinen' Funktion $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ überführt. Setze nun

$$\begin{aligned} v(y) &= u(y_1, .., y_{n-1}, y_n + \phi(y_1, ..., y_{n-1})), \\ u(x) &= v(x_1, .., x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, ..., x_{n-1})), \\ \mathbf{\Phi}(x) &= (x_1, .., x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, ..., x_{n-1})), \\ \mathbf{\Psi}(x) &= (x_1, .., x_{n-1}, x_n + \phi(x_1, ..., x_{n-1})). \end{aligned}$$

Dann gilt wegen $(\nabla u)(\mathbf{x}) = (\nabla v)(\mathbf{y})(\nabla \mathbf{\Phi})(\mathbf{x})$ die Gleichung

$$0 = F((\nabla u)(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = F((\nabla v)(\mathbf{y})(\nabla \mathbf{\Phi})(\mathbf{x}), v(\mathbf{y}), \Psi(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}),$$

d.h. für ein geeignetes G und $\Omega_* \subset \mathbf{\Phi}(\Omega)$:

$$G(\nabla v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \Omega_*.$$

Außerdem $v = h$ auf $\Gamma_* \subset \Phi(\Gamma)$ mit $h(\mathbf{y}) = g(\Psi(\mathbf{y}))$, d.h. (II.4) ist lokal äquivalent zu

$$\begin{aligned} G(\nabla v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y}), \mathbf{y}) &= 0 \text{ in } \Omega_* \\ v &= h \text{ auf } \Gamma_* \end{aligned}$$

II.2.3. Bestimmung der Anfangsdaten für Ω mit glatten Rand

Definiere $\mathbf{x_0} = \mathbf{X}(0)$, $z_0 = z(0) = g(\mathbf{x_0})$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$. Wie in Section II.1 gilt dann

$$\begin{aligned} \partial_j u(\mathbf{x_0}) = \mathbf{p}_{0,j} &= (\partial_j g)(\mathbf{x_0}), \quad j = 1, .., n-1, \\ F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) &= 0. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit die Kompatibilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(0) &= \mathbf{x_0}, \\ z(0) &= z_0, \\ \mathbf{p}_j(0) &= (\partial_j g)(\mathbf{x_0}), \quad j = 1,..,n-1 \\ F(\mathbf{p}(0), z(0), \mathbf{X}(0)) &= 0. \end{aligned} \tag{II.6}$$

eq:4

Der Punkt $(\mathbf{x_0}, z_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ heißt *zulässig*, falls (II.6) erfüllt ist. Beachte, dass z_0 durch die Wahl von $\mathbf{x_0}$ festgelegt ist. Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbf{p}_0$ ist nicht klar.

II.2.4. Nicht charakteristische Randdaten

In diesem Abschnitt wollen wir stets annehmen, dass $(\mathbf{x_0}, z_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ zulässig ist. Wir wollen (II.6) jedoch nicht nur in $\mathbf{x_0} \in \Gamma$, sondern in einer Umgebung von $\mathbf{x_0}$ betrachten. Dies führt auf folgende Erweiterung von (II.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(0) &= \mathbf{y}, \\ \mathbf{p}(0) &= \mathbf{q}(\mathbf{y}), \\ z(0) &= g(\mathbf{y}), \\ \mathbf{q}_j(\mathbf{y}) &= (\partial_j g)(\mathbf{y}), \quad j = 1,..,n-1, \\ F(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y}) &= 0, \quad \mathbf{y} \in U_{\mathbf{x_0}}, \end{aligned} \tag{II.7}$$

eq:4'

wobei $U_{\mathbf{x_0}}$ eine Umgebung von $\mathbf{x_0}$ in Γ ist.

lma:2.2 **Lemma II.3.** *Sei* $F_{\mathbf{p}_n}(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \neq 0$. *Dann existiert eine eindeutige Lösung* q *von* (II.7) *für* $\mathbf{y} \in \Gamma$ *nahe bei* x_0. *In diesem Fall heißt* $(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0})$ nicht charakteristisch.

Proof:. *Definiere* $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \times U_{\mathbf{x_0}} \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) &= \mathbf{p}_i - \partial_i g(y), \quad i = 1,..,n-1 \\ \mathbf{G}_n(\mathbf{p}, \mathbf{y}) &= F(\mathbf{p}, g(\mathbf{y}), \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Dann folgt $\mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x_0}) = 0$ *und*

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x_0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \partial_{\mathbf{p}_1} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) & \partial_{\mathbf{p}_2} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) & \cdots & \partial_{n-1} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) & \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \end{bmatrix}$$

Insbesondere gilt also $\det \mathbf{G}(\mathbf{p}_0, \mathbf{x_0}) = \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \neq 0$. *Die Existenz von* $\mathbf{q}$ *in einer Umgebung von* $\mathbf{x_0}$ *in* Γ *folgt aus dem Satz über implizite Funktionen mit* $\mathbf{G}(\mathbf{q}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$ *und* $\mathbf{q}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{p}_0$.

rem:2.3 **Bemerkung II.4.** *Falls* Γ *nicht flach* $\mathbf{x_0} \in \Gamma$ *ist, so ist* $\mathbf{x_0} \in \Gamma$ *nicht charakteristisch falls* $D_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \nu(\mathbf{x_0}) \neq 0$, *wobei* ν *die äußere Normale bezeichnet.*

II.2.5. Lokale Lösungen

OBdA sei Γ in diesem Abschnitt flach. Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(s) &= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(y_1, .., y_{n-1}, s),\\ z(s) &= z(\mathbf{y}, s) = z(y_1, .., y_{n-1}, s),\\ \mathbf{X}(s) &= \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{X}(y_1, .., y_{n-1}, s).\end{aligned}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung von (II.5) mit Anfangsdaten (II.7) (Übungsaufgabe). Wie im Anschnitt II.1 müssen wir X invertieren.

lma:2.4 **Lemma II.5.** *Sei* $(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0})$ *nicht charakteristisch. Dann existiert ein offenes Intervall* $I \subset \mathbb{R}$ *um 0 und Umgebungen* $W \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *von* $\mathbf{x_0}$ *sowie* $V \subset \mathbb{R}^n$ *von* $\mathbf{x_0}$*, sodass für alle* $\mathbf{x} \in V$ *eindeutige* $s = S(\mathbf{x}) \in I$ *und* $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x) \in W$ *existieren mit* $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x}))$*. Die Abbildungen* S *und* $\mathbf{Y}$ *sind* C^2*.*

Proof:. *Es gilt* $\mathbf{X}(\mathbf{x_0}, 0) = \mathbf{x_0}$*,* $\mathbf{X}(\mathbf{y}, 0) = (\mathbf{y}, 0)$*. Weiter*

$$(\nabla \mathbf{X})(\mathbf{x_0}, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{\mathbf{p}_1} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \partial_{\mathbf{p}_{n-1}} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{\mathbf{p}_n} F(\mathbf{p}_0, z_0, \mathbf{x_0}), \end{bmatrix}$$

d.h. $\det(\nabla \mathbf{X})(\mathbf{x_0}, 0) \neq 0$ *nach Voraussetzung. Die Behauptung folgt nach dem Satz über die Umkehrabbildung.*

thm:2.5 **Theorem II.6.** *Unter den Voraussetzungen von Lemma* (II.5) *setze* $u(\mathbf{x}) = z(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$*,* $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$*, wobei* $\mathbf{y}$*,* s*,* $\mathbf{p}$ *und* z *wie oben definiert sind. Dann gilt*

$$\begin{aligned} F(\nabla u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, &\quad \mathbf{x} \in V,\\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), &\quad \mathbf{x} \in V \cap \Gamma. \end{aligned}$$

Proof:. <u>*Schritt 1:*</u> *Löse* (II.5), (II.6).
Die Existenz einer Lösung $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)$*,* $z(s) = z(\mathbf{y}, s)$*,* $\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)$ *von* (II.5) *und* (II.6) *folgt unmittelbar aus der Theorie für gewöhnliche DGL.*

<u>*Schritt 2:*</u> *Es gilt* $f(\mathbf{y}, s) = F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) = 0$ *für* $\mathbf{y} \in W$ *und* $s \in I$*.*
Wegen $\mathbf{p}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{q}(\mathbf{y})$*,* $z(\mathbf{y}, 0) = g(\mathbf{y})$ *folgt* $f(\mathbf{y}, 0) = 0$ *für* $\mathbf{y} \in W$*. Weiter folgt mit* (II.5) *dann (Übungsaufgabe)*

$$\begin{aligned}\partial_s f(\mathbf{y}, s) =& D_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \partial_s \mathbf{p} + \nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \partial_s z + \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \partial_s \mathbf{X}\\ =& D_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, z, \mathbf{X})[-\nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{p} - \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X})] + D_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X})\\ &+ \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{X}) = 0, \quad s \in I.\end{aligned}$$

<u>*Schritt 3:*</u> *Wir zeigen* $F(\mathbf{p}(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in V$. *Mit Schritt 2 folgt direkt:*

$$F(\mathbf{p}(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = F(\mathbf{p}(\mathbf{Y}(\mathbf{x})), S(\mathbf{x})), z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})), \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) = 0.$$

<u>*Schritt 4:*</u> *Wir zeigen* $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V$. *Zunächst zeige*

$$\partial_s z(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s) \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial s}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_s \mathbf{X}(y, s) \tag{II.8}$$

eq:thm:2

$$\partial_{\mathbf{y}_j}(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s) \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial \mathbf{y}_j}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_j} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \tag{II.9}$$

eq:thm:2

Gleichung (II.8) *folgt direkt aus* (II.5).
Für (II.9) *sei* $\mathbf{y} \in \Gamma$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$ *und setze*

$$r_i(s) = \partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} r_i(0) &= \partial_i g - \mathbf{q}_i(\mathbf{y}) \overset{(II.7)}{=} 0 \\ \dot{r}_i(s) &= \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s z(\mathbf{y}, s) - \partial_s \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \end{aligned} \tag{II.10}$$

eq:thm:2.5-ode

eq:thm:2

Aus (II.8) *folgt*

$$\partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s z(\mathbf{y}, s) = (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_s \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s).$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot{r}_i(s) &= (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \partial_s \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \\ &\quad - \partial_s \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) - \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \\ &\overset{(II.5)}{=} (\partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) - [-\nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \\ &\quad - \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}, s)] \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s). \end{aligned}$$

Mit Schritt 2 folgt

$$\begin{aligned} 0 = \partial_{\mathbf{y}_i} f(\mathbf{y}, s) = {} & \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \\ & + \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s) \\ & + \nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s), \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{r}_i(s) &= \nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot [-\partial_{\mathbf{y}_i} z(\mathbf{y}, s)) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \partial_{\mathbf{y}_i} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)] \\ &= -\nabla_z F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{X}(\mathbf{y}, s)) \cdot r_i(s). \end{aligned}$$

Aus der Theorie von ODE folgt, dass $r_i \equiv 0,\ s \in I,\ i = 1, \ldots, n-1$ *eine Lösung von* (II.10) *ist, d.h.* (II.9) *gilt. Wir berechnen mit Hilfe von* (II.8) *und* (II.9)*:*

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{x}_j} u(\mathbf{x}) &\overset{Def.}{=} \partial_s z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} z(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) \cdot \left[\nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_y \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x})\right].
\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen:

$$\partial_s \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} \quad \textit{(Kronecker-Delta)}$$

Es gilt wegen $\mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$*:*

$$\begin{aligned}
\delta_{ik} &= \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{X}_k \\
&= \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) + \nabla_s \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})) \cdot \partial_{\mathbf{x}_j} S(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\partial_{\mathbf{x}_j} u(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_j(\mathbf{y}, s)$ *und somit* $\nabla_{\mathbf{x}} u = \mathbf{p}$.

ex:2.6 **Beispiel II.7.** *Wir betrachten eine lineare, homogene PDE, d.h.*

$$F(\nabla u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla(u)(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}) \cdot u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \qquad \text{(II.11)}$$ eq:ex:2.6

Dann folgt mit

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= b(\mathbf{x}) \\
\nabla_z F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= c(\mathbf{x}) \\
\nabla_{\mathbf{X}} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) &= 0.
\end{aligned}$$

und (II.5) *(vgl. Übungen)*

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}(s) &= -c(\mathbf{X}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\
\dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s) \cdot b(\mathbf{X}(s)) = -c(\mathbf{X}(s)) \cdot z(s) \\
\dot{\mathbf{X}}(s) &= b(\mathbf{X}(s)).
\end{aligned}$$

Annahme: *Sei* $c \equiv 0$ *und* $\dot{\mathbf{X}}(s) = b(\mathbf{X}(s))$ *besitzt folgende Trajektorien:*

$INSERT\ PICTURE$

Somit ist $z \equiv const$ *entlang jeder Trajektorie; aber beachte Kompatibilitätsbedingung an* g*, da die Funktionswerte am Rand vorgeschrieben sind.*

Annahme: *Sei* $c \equiv 0$ *und* $\dot{\mathbf{X}}(s) = b(\mathbf{X}(s))$ *besitzt folgende Trajektorien:*

$INSERT\ PICTURE$

Lösung ist nur glatt, falls g *konstant ist.*

rem:2.7 **Bemerkung II.8.** *Insbesondere folgt aus obigem Beispiel, dass i.A. keine glatte Lösung existiert.*

II.2.6. Schwache Formulierung

Wir betrachten die PDE

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) &= g \quad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned} \tag{II.12}$$

eq:schwF

Multiplikation mit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}_+})$ liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x F(u)) \cdot \varphi \\ &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi + \int_{\mathbb{R}} g \cdot \varphi(\cdot, 0) \end{aligned} \tag{II.13}$$

eq:schwF

φ heißt *Testfunktion*.

dfn:IntLsg **Definition II.9.** Wir sagen, dass $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ eine *Integrallösung* von (II.12) ist, falls (II.13) für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}_+)$ gilt.

Wir betrachten folgende Situation:

INSERT PICTURE

Hierbei bezeichnet ν die äußere Normale, u sei glatt in V_l und V_r. C heißt *Unstetigkeitskurve*, falls u in C nicht stetig ist (wovon wir im Folgenden ausgehen). Somit ergibt sich

$$0 = \int_{V_l} u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi = -\int_{V_l} (\partial_t u + \partial_x F(u))\, \varphi, \qquad \varphi \in C_c^\infty(V_l).$$

Es folgt (für V_r analog):

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 \quad \text{in } V_l \\ \partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 \quad \text{in } V_r. \end{aligned} \tag{II.14}$$

eq:unste

Weiter gilt für $\varphi \in C_c^\infty(V)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_V u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi \\ &= -\int\limits_{V_l \cup V_r} (\partial_t u + \partial_x F(u))\, \varphi + \int\limits_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_l \\ F(u_l) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi - \int\limits_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_r \\ F(u_r) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi \\ &\overset{\text{(II.14)}}{=} \int\limits_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_l - u_r \\ F(u_l) - F(u_r) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi, \end{aligned}$$

wobei u_l der Grenzwert von links in $C \cap V$ und u_r der Grenzwert von rechts ist.

Sei nun C gegeben durch $\{(x,t) : x = S(t)\}$ für $S : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ glatt. Dann gilt

$$F(u_l) - F(u_r) = \dot{S} \cdot (u_l - u_r),$$

wobei

$$\nu \overset{(\text{ÜA})}{=} \frac{1}{1+(\dot{S})^2}\begin{pmatrix}-\dot{S}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Mit der Notation

$$\begin{aligned}
[[u]] &= u_l - u_r && \text{(Sprung in } u \text{ entlang } C)\\
[[F(u)]] &= F(u_l) - F(u_r) && \text{(Sprung in } F(u) \text{ entlang } C)\\
\sigma &= \dot{S} && \text{(„Geschwindigkeit“ von } C)
\end{aligned}$$

lässt sich dies über

$$[[F(u)]] = \sigma \cdot [[u]] \tag{II.15}$$

eq:R-H-Bed

entlang der Unstetigkeitskurve C ausdrücken. Gleichung (II.15) heißt *Rankine-Hugoniot-Bedingung*.

Beispiel II.10 (*Burgersgleichung*)**.** *Setze*

$$F(u) := \frac{u^2}{2}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0,\\ 1-x & 0 < x \leq 1,\\ 0 & x > 1.\end{cases}$$

und betrachte

$$\begin{aligned}
\partial_t u + \partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right) &= 0 \text{ in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\\
u &= g \text{ auf } \mathbb{R}\times\{t=0\}
\end{aligned} \tag{II.16}$$

q:burgers

Die (projizierten) Charakteristiken haben die Form [ÜA] $Y(s) = (g(x_0)s + x_0, s)$, also ist die Lösung über

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \leq t, 0 \leq t < 1,\\ \frac{1-x}{1-t} & t \leq x \leq 1, 0 \leq t < 1,\\ 0 & x \geq 1, 0 \leq t < 1.\end{cases}$$

gegeben.

Für $t > 1$ kreuzen sich die Charakteristiken. Setzte $s(t) = \frac{1+t}{2}$ und

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x < s(t), t \geq 1, \\ 0 & x > s(t), t \geq 1. \end{cases}$$

Dann gilt entlang s:

$$F(u_l) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2},\ F(u_r) = \frac{0^2}{2} = 0,\ u_l = 1,\ u_r = 0,$$

d.h. $[[u]] = 1$, $[[F(u)]] = \frac{1}{2}$. Die Rankine-Hugonoit-Bedingung liefert also $\sigma = \frac{1}{2} = \dot{s}$.

Wir betrachten nun II.10 mit $g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$

Dann ist sowohl

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & x < t/2, \\ 1 & x > t/2 \end{cases} \text{ als auch } u_2(x,t) = \begin{cases} 1 & x > t, \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

eine Integrallösung von II.10 ([ÜA] Überprüfe Rankine-Hugoniot-Bedingung).

Problem: Eindeutigkeit.

Im Folgenden nehmen wir an, dass wir von einem Punkt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ausgehend entlang einer (projizierten) Charakteristik **rückwärts** keine andere Charakteristik treffen.

Sei nun C wieder eine Unstetigkeitskurve und $P \in C$, so dass P von den Charakteristiken Y_1 und Y_2 getroffen wird.

Dann gilt wegen $Y_i(s) = (F'(g(x_i))s + x_i, s)$, $i = 1, 2$, $x_1 < x_2$ für die Charakteristiken, dass

$$\begin{aligned} &F'(u_l)s + x_1 = F'(u_r)s + x_2 \Rightarrow (F'(u_l) - F'(u_r))s = x_2 - x_1 > 0 \\ &\overset{[ÜA]}{\Rightarrow} F'(u_l) > \sigma > F'(u_r). \end{aligned} \tag{II.17}$$

eq:entroBed

Diese Ungleichung nennt man auch *Entropie-Bedingung*. Eine Unstetigkeitskurve nennt man *Schock* falls (II.17) und die Rankine-Hugonoit-Bedingung erfüllt sind.

Sei nun F gleichmäßig konvex, d.h. $F'' \geq \Theta > 0$ für ein $\Theta > 0$. Dann folgt wegen F' streng monoton wachsend, dass (II.17) zu $u_l > u_r$ äquivalent ist. Insbesondere ist F' injektiv und surjektiv. Wir definieren

$$G := (F')^{-1}.$$

Dann ist eine Integrallösung von II.10 für $g(x) = \begin{cases} u_l & x < 0, \\ u_r & x > 0 \end{cases}$ und $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \begin{cases} u_l & \frac{x}{t} < \sigma \\ u_r & \frac{x}{t} > \sigma \end{cases} \text{ mit } \sigma = \tfrac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r} \quad \text{falls } u_l > u_r \\ \text{bzw. } u(x,t) &= \begin{cases} u_l & \frac{x}{t} < F'(u_l) \\ G(\frac{x}{t}) & F'(u_l) < \frac{x}{t} < F'(u_r) \\ u_r & \frac{x}{t} > F'(u_r) \end{cases} \quad \text{falls } u_l < u_r \end{aligned}$$

(ohne Beweis).

Bemerkung II.11.

(a) Im ersten Fall sind u_l und u_r durch einen Schock getrennt, im zweiten Fall durch eine Rarefaction Wave.

(b) *Man kann zeigen, dass für F konvex und glatt höchstens eine Integrallösung existiert, welche zusätzlich*

$$u(x+z,t)-u(x,t) \leq c(1+\frac{1}{t})z,\ x \in \mathbb{R},\ z,t>0$$

für ein $c>0$ genügt. Insbesondere sind diese Lösungen eindeutig.

(c) *Die Existenz einer Integrallösung lässt sich mit Variationsrechnung zeigen, vgl. Lax-Oleinik-Formel.*

II.2.7. Inhomogenes Problem

sec:charInhom

Wir betrachten in diesem Abschnitt:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \mathbf{b}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{aligned} \tag{II.18}$$

eq:in_ho

Wie in Abschnitt 1 setzen wir

$$z(s)=u(\mathbf{X}(s)),\ \mathbf{p}(s)=\begin{pmatrix}\nabla_{\mathbf{x}}u\\ \partial_t u\end{pmatrix}(\mathbf{X}(s)),\ \dot{\mathbf{X}}(s)=\begin{pmatrix}b\\1\end{pmatrix}.$$

Dann folgt mit $\partial_{n+1}=\partial_t$, dass

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s)\dot{\mathbf{X}}(s), \\ (\dot{\mathbf{p}}^i)(s) &= \begin{pmatrix}\nabla_{\mathbf{x}}\partial_i u\\ \partial_t\partial_i u\end{pmatrix}(\mathbf{X}(s))\cdot\mathbf{X}(s),\ i=1,\dots,n+1 \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{p}(s)\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{b}\\1\end{pmatrix} = f(\mathbf{X}(s)). \end{aligned}$$

Integration der letzten Gleichung ergibt

$$z(t)-z(0)=\int\limits_0^t f(\mathbf{X}(s))ds=\int_0^t f(\mathbf{x_0}+\mathbf{b}s,s)ds,$$

d.h $u(\mathbf{x_0}+\mathbf{b}t,t)=\int_0^t f(\mathbf{x_0}+\mathbf{b}s,s)ds$. Mit $\mathbf{x}:=\mathbf{x_0}+\mathbf{b}t$ folgt dann

$$u(\mathbf{x},t)=\int_0^t f(\mathbf{x}+\mathbf{b}(s-t),s)ds. \tag{II.19}$$

eq:trans

II.3. Die Wellengleichung

II.3.1. Der Fall $n=1$

sec:welle1d

Wir betrachten zunächst

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \\ \partial_t u &= h \quad \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{aligned} \tag{II.20}$$

eq:welle

Wegen $(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = \partial_t^2 u - \partial_x^2 u$ lässt sich II.20 in

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x u &= v && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_t v + \partial_x v &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ v &= h - \partial_x g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

umschreiben. Mit Abschnitt 1 folgt nun $(b = 1)$

$$v(x, s) = h(x - s) - (\partial_x g)(x - s) =: a(x - s).$$

Mit Abschnitt 2.7 folgt analog $(b = -1,\ f(x, s) = v(x, s))$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int\limits_0^t v(x - (s - t), s) ds + g(x + t) \\ &= \int_0^t a(x + t - 2s) ds + g(x + t) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} a(y) dy + g(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} (\partial_x g)(y) dy + g(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} h(y) dy + \frac{1}{2} g(x + t) + \frac{1}{2} g(x - t) \end{aligned} \tag{II.21}$$

eq:Alembert

Dies ist *d'Alemberts Formel*. In $(*)$ wurde die Substitution $y = x + t - 2s$, $dy = -2ds$ verwendet.

thm:welle

Theorem II.12. *Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ dann ist $u \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ definiert durch II.21 eine Lösung von II.20.*

Proof:. *Nachrechnen.*

Im nächsten Schritt betrachten wir

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u &= 0 && \text{auf } \{x = 0\} \times \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{II.22}$$

eq:welle2

mit $g(0) = h(0) = 0$.
<u>Idee:</u> Erweitere u, g, h auf $\mathbb{R}$, d.h.

$$\tilde{g} = \begin{cases} g(x) & , x \geq 0 \\ -g(-x) & , x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{h} = \begin{cases} h(x) & , x \geq 0 \\ -h(-x) & , x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{u} = \begin{cases} u(x) & , x \geq 0 \\ -u(-x) & , x < 0 \end{cases}.$$

Falls u Gleichung (II.22) löst, so löst $\tilde{u}$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tilde{u} - \partial_x \tilde{u} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \tilde{u} &= \tilde{g} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ \partial_t \tilde{u} &= \tilde{h} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Nach (II.19) ist $\tilde{u}$ über

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy$$

gegeben. Insbesondere folgt $\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(t) + \tilde{g}(-t)) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \tilde{h}(y)dy = 0$ für $t \geq 0$ und

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy & , x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t} h(y)dy & , 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

<u>**Beachte:**</u> $u \notin \mathcal{C}^2$ falls $g''(0) \neq 0$

II.3.2. Der Fall $n = 3$

Wir setzen

$$U(\mathbf{x}, r, t) := \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{\partial B(\mathbf{x}, r)} \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y}, t) \quad \text{(Mittelwert über } \partial B(\mathbf{x}, r)),$$

$$G(\mathbf{x}, r, t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} g(\mathbf{y}, t), \quad H(\mathbf{x}, r, t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} h(\mathbf{y}, t).$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta_{\mathbf{x}} u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.23}$$

eq:welle

für $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n), h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

lma:II.12 **Lemma II.13.** *(*(Euler-Poisson-Darboux-Gleichung)
Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *und* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ *eine Lösung von* (II.23)*. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U - \partial_r^2 U - \frac{n-1}{r}\partial_r U &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ U &= G && \textit{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \partial_t U &= H && \textit{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.24}$$

eq:EPDGl

Proof:. *Mit*

$$U(\mathbf{x},r,t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y},t)dS(y) \overset{ÜA}{=} \fint_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x}+r\mathbf{z},t)dS(\mathbf{z})$$

folgt

$$\begin{aligned}\partial_r U(\mathbf{x},r,t) &= \fint_{\partial B(0,1)} \mathbf{z}(\nabla u)(\mathbf{x}+r\mathbf{z},t)dS(\mathbf{z}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \frac{y-x}{r}(\nabla u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) \\ &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \nu(\triangledown u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) \overset{Gauß}{=} \frac{1}{|\partial B(\mathbf{x},r)|}\int_{B(\mathbf{x},r)} div(\nabla u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{|B(\mathbf{x},r)|}{|\partial B(\mathbf{x},r)|}\fint_{B(\mathbf{x},r)} (\Delta u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) \overset{ÜA}{=} \frac{r}{n}\fint_{B(\mathbf{x},r)} (\Delta u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\partial_r^2 U(\mathbf{x},r,t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) + (\frac{1}{n}-1)\fint_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}). \qquad \text{(II.25)} \quad \boxed{\texttt{eq:sndDU}}$$

Damit folgt $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ *und*

$$\begin{aligned}&\lim_{r\searrow 0} \partial_r U(\mathbf{x},r,t) = 0, \\ &\lim_{r\searrow 0} \partial_r^2 U(\mathbf{x},r,t) = \frac{1}{n}\Delta u(\mathbf{x},t).\end{aligned} \qquad \text{(II.26)} \quad \boxed{\texttt{eq:limU}}$$

Aus (II.23) *ergibt sich dann*

$$\partial_r U(\mathbf{x},r,t) = \frac{r}{n}\fint_{B(\mathbf{x},r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y},t)dy = \frac{1}{n\alpha(n)}\frac{1}{r^{n-1}}\int_{B(\mathbf{x},r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y},t)dy,$$

wobei $\alpha(n)$ *das Maß der Einheitskugel bezeichnet. Insbesondere erhalten wir*

$$r^{n-1}\partial_r U(\mathbf{x},r,t) = \frac{1}{n\alpha(n)}\int_{B(\mathbf{x},r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y},t)dy. \qquad \text{(II.27)} \quad \boxed{\texttt{eq:GlU}}$$

Mit den Gleichungen (II.27) *und* (II.25) *folgt dann*

$$
\begin{aligned}
\partial_r(r^{n-1}\partial_r U(\mathbf{x},r,t)) =&(n-1)r^{n-2}\partial_r U(\mathbf{x},r,t) + r^{n-1}\partial_r^2 U(\mathbf{x},r,t)\\
=&\frac{n-1}{n\alpha(n)}\frac{1}{r}\int\limits_{B(\mathbf{x},r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) + r^{n-1}\fint\limits_{\partial B(\mathbf{x},r)} (\Delta u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y})\\
&+ r^{n-1}\frac{1-n}{n}\fint\limits_{B(\mathbf{x},r)} (\Delta u)(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y})\\
=&r^{n-1}\fint\limits_{\partial B(\mathbf{x},r)} \partial_t^2 u(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}) = r^{n-1}\partial_t^2 U,
\end{aligned}
$$

wobei wir im vorletzten Schritt $|B(\mathbf{x},r)| = r^n\alpha(n)$ *verwendet haben. Insgesamt folgt*

$$
(n-1)r^{n-2}\partial_r U(\mathbf{x},r,t) + r^{n-1}\partial_r^2 U(\mathbf{x},r,t) = r^{n-1}\partial_t^2 U
$$

Teilt man beide Seiten der Gleichung durch r^{n-1}*, so folgt die Behauptung.*

Sei nun $n=3$. Wir setzen $\tilde{U} = rU$, $\tilde{G} = rG$ und $\tilde{H} = rH$. Dann folgt mit (II.24)

$$
\begin{aligned}
\partial_t^2\tilde{U} = r\partial_t^2 U = r(\partial_r^2 U + \frac{2}{r}\partial_r U) &= r\partial_r^2 U + 2\partial_r U) = \partial_r(U + r\partial_r U)\\
&= \partial_r\partial_r\tilde{U} = \partial_r^2\tilde{U}
\end{aligned}
$$

und mit (II.26)

$$
\partial_r^2\tilde{G}(0) = 0\cdot\partial_r^2 G(0) + 2\partial_r G(0) = 0,
$$

d.h. $\tilde{U}$ löst

$$
\begin{aligned}
\partial_t^2\tilde{U} - \partial_r\tilde{U} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\\
\tilde{U} &= \tilde{G} && \text{auf } \mathbb{R}_+\times\{t=0\}\\
\partial_t\tilde{U} &= \tilde{H} && \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\}\\
\tilde{U} &= 0 && \text{auf } \{r=0\}\times\mathbb{R}_+
\end{aligned}
\tag{II.28}
$$

eq:16

Mit Abschnitt II.3.1 folgt

$$
\tilde{U}(\mathbf{x},r,t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t}\tilde{H}(y)dy
$$

und

$$u(\mathbf{x},t) = \underset{r\searrow 0}{lim}\ U(\mathbf{x},r,t) = \lim r \searrow 0 \frac{\tilde{U}(\mathbf{x},r,t)}{r} = \lim r \searrow 0 (\frac{1}{2r}(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2r}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy$$
$$= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\,(tG(t)) + tH(t) = \frac{\partial}{\partial t}\,(t \fint_{\partial B(x,t)} g\ ds) + t \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} h\ ds. \tag{II.29}$$

eq:17

Wie oben folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} g(\mathbf{y})\ dS(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial t} \fint_{\partial B(0,1)} g(\mathbf{x}+t\mathbf{z})\ dS(\mathbf{z}) = \int_{\partial B(0,1)} z(\nabla g)(\mathbf{x}+t\mathbf{z})\ dS(\mathbf{z})$$
$$= \int_{\partial B(\mathbf{x},t)} \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t}(\nabla g)(\mathbf{y})\ dS(\mathbf{z})$$

Mit (II.29) löst u, definiert über

$$u(\mathbf{x},t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} th(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})\ dS(\mathbf{y})$$

löst (II.23) Diese Formel heisst *Kirchhoff's Formel*

thm:II.13 **Theorem II.14.** *Sei $n = 3$, $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3), h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist die Lösung von* (II.23) *über*

$$u(\mathbf{x},t) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} th(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})\ dS(\mathbf{y}) \tag{II.30}$$

eq:welleF3

gegeben.

rem:II.14 **Bemerkung II.15.** *Obiger Ansatz kann auf beliebige,* ungerade Dimension übertragen werden.

II.3.3. Der Fall $n = 2$

Leider ist keine Transformaion bekannt, welche die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung in eine eindimensionale Wellengleichung überführt. Wir setzen $\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t)$. Dann folgt nach Definition, dass $\overline{u}$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \bar{u} - \partial_x \bar{u} = 0 \qquad & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ \bar{u} = \bar{g} \qquad & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \\ \partial_t \bar{u} = \bar{h} \qquad & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit $\bar{g}(x_1,x_2,x_3) = g(x_1,x_2)$ und $\bar{h}(x_1,x_2,x_3) = h(x_1,x_2)$ löst. Setzen wir $\bar{\mathbf{x}} = (x_1,x_2,0)$, so ist $\overline{u}$ nach Formel II.29 über

$$\bar{u}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\,(t \fint_{\partial\bar{B}(\bar{\mathbf{x}},t)} \bar{g}\; d\bar{S}) + t\int_{\partial\bar{B}(\bar{\mathbf{x}},t)} \bar{h}\; d\bar{S}$$

gegeben.

$$u(\mathbf{x},t) = \overline{u}(\overline{\mathbf{x}}t) = \frac{\partial}{\partial t}(t\fint_{\partial\overline{B}(\overline{\mathbf{x}},t)} \overline{g}\; d\overline{S}) + t\fint_{\partial\overline{B}(\overline{\mathbf{x}},t)} \overline{h}\; d\overline{S}, \quad \overline{\mathbf{x}} = (x_1,x_2,0)$$

Wegen

$$\fint_{\partial\overline{B}(\overline{\mathbf{x}},t)} \overline{g}d\overline{S} = \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial\overline{B}(\overline{\mathbf{x}},t)} \overline{g}d\overline{S} \overset{(\text{ÜA})}{=} \frac{2}{4\pi t^2}\int_{B(\mathbf{x},t)} g(\mathbf{y})(1+|D\gamma|^2)^{\frac{1}{2}}\; d\mathbf{y}$$

wobei $\gamma(t) = (t^2 - |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}$.
Mit $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x},t)$ folgt $(\nabla\gamma)(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(t^2 - |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2)^{-\frac{1}{2}}2(\mathbf{y}-\mathbf{x})$
$1 + |D\gamma|^2 = 1 + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{\sqrt{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}^2} = \frac{t}{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}$

$$\Rightarrow \fint_{\partial\overline{B}(\overline{\mathbf{x}},t)} \overline{g}d\overline{S} = \frac{1}{2\pi t}\int_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(y)}{(t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}}\;\mathrm{d}\mathbf{y} = \frac{t}{2}\fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}}\;\mathrm{d}\mathbf{y}$$

Analog natürlich auch fr̈ h, sodass folgt:

$$\Rightarrow u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\partial_t(t^2\fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}}\;\mathrm{d}\mathbf{y}) + \frac{t^2}{2}\fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{h(\mathbf{y})}{(t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2)^{\frac{1}{2}}}\;\mathrm{d}\mathbf{y}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
&\partial_t(t^2\fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(t^2-|y-x|^2)^{\frac{1}{2}}}\;\mathrm{d}\mathbf{y})\\
&= \partial_t(t^2\fint_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x}+t\mathbf{z})}{(t^2-t^2\mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}}\;\mathrm{d}\mathbf{z})\\
&= \partial_t(t\fint_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x}+t\mathbf{z})}{(1-\mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}}\;\mathrm{d}\mathbf{z})\\
&= \fint_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x}+t\mathbf{z})}{(1-\mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}}\;\mathrm{d}\mathbf{z} + t\fint_{B(0,1)} \frac{\mathbf{z}(\nabla g)(\mathbf{x}+t\mathbf{z})}{(1-\mathbf{z}^2)^{\frac{1}{2}}}\;\mathrm{d}\mathbf{z}\\
&\overset{\mathbf{y}=\mathbf{x}+t\mathbf{z}}{=} \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(\mathbf{y})}{(1-(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t})^2)^{\frac{1}{2}}}\;\mathrm{d}\mathbf{y} + t\fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{(\nabla g)(\mathbf{y})(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{(1-(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t})^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{t}\;\mathrm{d}\mathbf{y}\\
&= t\fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})}{(1-(\mathbf{y}-\mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}}\;\mathrm{d}\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Also:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2} \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{t(g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})) + t^2 h(\mathbf{y})}{(t^2 - (\mathbf{y}-\mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}} \, \mathrm{d}\mathbf{y}$$

Insgesamt:

thm:2.14 **Theorem II.16.** *Sei $n = 2$,$g \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Dann ist die Lösung von* (II.20) *über*

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(\mathbf{x},t)} \frac{t(g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})(\nabla g)(\mathbf{y})) + t^2 h(\mathbf{y})}{(t^2 - (\mathbf{y}-\mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}}} \, \mathrm{d}\mathbf{y}$$

gegeben.

Bemerkung II.17. *Obiger Ansatz lässt sich auf beliebige gerade Dimensionen verallgemeinern.*

III. Harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In diesem Abschnitt betrachten wir Lösungen der *Laplace-Gleichung.*

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \quad & \mathit{in}\ \Omega \\ u = g \quad & \mathit{auf}\ \partial\Omega \end{aligned} \tag{III.1}$$ eq:laplace

für geeignetes g. Funktionen $u \in C^2(\Omega)$, welche $\Delta u = 0$ in Ω genügen heißen *harmonisch.*

III.1. Grundlagen

Folgende Grundlagen aus Analysis II werden eine wichtige Rolle spielen:

prp:3.1 **Proposition III.1.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit gleichmäßigem C^1-Rand. Dann gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} u = \int_{\partial\Omega} u\nu, \quad u \in C^1(\overline{\Omega})^n, u, \partial_j u \in L^1(\Omega)^n, j = 1, \ldots, n$$

Hier bezeichnet ν die äussere Normale.

Proof:. *(ÜA)*

cor:3.2 **Korollar III.2.** *(Partielle Integration)*
Unter den Voraussetzungen von (III.1) *gilt*

$$\int_\Omega (\partial_i u)v + \int_\Omega u\partial_i v = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\ ; u, v \in C^1(\overline{\Omega})\,, v\,, \partial_i v\,, u\,, \partial_i u \in L^1(\Omega)$$

Proof:. *Sei $i \in 1, ..., n$. Definiere $U : \Omega \to \mathbb{R}^n$ über $U = uve_i$ Dann folgt mit* (III.1)

$$\int_\Omega (\partial_i u)v + \int_\Omega u\partial_i v = \int_\Omega \partial_i(uv) = \int_\Omega \operatorname{div} U = \int_{\partial\Omega} U\nu = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i$$

cor:3.3 **Korollar III.3.** *(Green'sche Formeln)*
Unter den Voraussetzungen von (III.1) *gilt*

(a) $\int_\Omega (\Delta u)v - u\Delta v = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u - u\partial_\nu v$

(b) $\int_\Omega \nabla u \nabla v = -\int_\Omega \Delta v + \int_{\partial\Omega} u\partial_j \nu$

(c) $\int_\Omega \Delta u = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u$

für $u, v \in C^2(\overline{\Omega}) : v,\ \partial_i v,\ \partial_i\partial_j v,\ u\ ,\ \partial_i u,\ \partial_i\partial_j u \in L^1(\Omega)\ i = 1, \ldots, n$

Proof:. *Mit*

$$\operatorname{div}(\nabla u)v = \operatorname{div}\begin{pmatrix}(\partial_1 u)v\\ \cdot\\ \cdot\\ (\partial_n u)v\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}(\partial_i^2 u)v + \sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)(\partial_i v) = (\Delta u)v + (\nabla u \nabla v)$$

folgt

$$\int_\Omega v\Delta u + \nabla u\nabla v = \int_\Omega \operatorname{div}((\nabla u)v) = \int_{\partial\Omega}(\nabla u)v\nu = \int_{\partial\Omega}(\partial_\nu u)v \qquad \text{(III.2)}$$ eq:green

Analog:

$$\int_\Omega u(\Delta v + (\nabla u a v) = \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu v \qquad \text{(III.3)}$$ eq:green

⇒ (a), (b)
(c) (ÜA)

III.2. Eigenschaften von harmonischen Funktionen

III.2.1. Mittelwerteigenschaft

prp:3.4 **Proposition III.4.** *Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gilt*

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u = \fint_{B(\mathbf{x},r)} u \qquad \text{(III.4)}$$ eq:mwe

für $\mathbf{x} \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B(\mathbf{x}, r) \subset\subset \Omega$. (III.4) *heißt* Mittelwerteigentschaft *auf Ω*

Proof:. *Setze $\Phi(r) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})$. Dann gilt (vgl. Beweis von Lemma II.13)*

$$\Phi'(r) = \frac{r}{n}\fint_{B(\mathbf{x},r)}(\Delta u) = 0$$

Da u stetig ist, folgt $\lim_{r\searrow 0}\Phi(r) = u(\mathbf{x})$, d.h.

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})$$

Mit Kugelkoordinaten folgt weiter

$$\int_{B(\mathbf{x},r)} u = \int_0^r (\int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u)\,\mathrm{d}s = u(\mathbf{x})\int_0^r n\alpha(n)s^{n-1}\,\mathrm{d}s = u(\mathbf{x})\alpha(n)s^n\,\Big|_r^0 = \alpha(n)r^n u(\mathbf{x})$$

Wobei $n\alpha(n)s^{n-1}$ dem Maß der Kugelschale und $\alpha(n)r^n$ dem Maß der Kugel entspricht.

prp:3.5

Proposition III.5. *Sei* $u \in C^2(\Omega)$ *mit*

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset\subset \Omega$. *Dann ist* u *harmonisch.*

Proof:. Annahme: $(\Delta u) > 0$ *für ein* $\mathbf{x_0} \in \Omega$.
Dann existiert ein $r > 0$*:* $(\Delta u)(\mathbf{x}) > 0$ *für* $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r)$. *Nun gilt für* Φ *wie im Beweis von* (III.4) *mit* $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$*:*

$$0 = \Phi'(r) = \fint_{B(\mathbf{x_0},r)} (\Delta u) > 0 \ \ \textit{Widerspruch!}$$

III.2.2. Maximumsprinzip

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets beschränkt.

thm:3.6

Theorem III.6. *Sei* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *harmonisch. Dann gilt*

(a) $\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} u(\mathbf{x})$

(b) falls $\mathbf{x_0} \in \Omega$ *mit* $u(\mathbf{x_0}) = \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x})$ *und* Ω *zusammenhängend*
$\Rightarrow u$ *ist konstant.*

Proof:. *Sei* $\mathbf{x_0} \in \Omega$*:* $u(\mathbf{x_0}) = M =: \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x})$. *Dann folgt mit* (III.4)

$$M = u(\mathbf{x_0}) = \fint_{B(\mathbf{x_0},r)} u \leq M$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $u \equiv M$ *in* $B(\mathbf{x_0}, r)$. *Damit ist die Menge* $M = \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) = M\}$ *offen und relativ abgeschlossen in* Ω. *Insbesondere* $M \equiv \Omega$ *falls* Ω *zusammenhängend.*
(a) folgt aus (b) (ÜA)

rem:3.7

Bemerkung III.7.

(a) Analog zu (III.6) *lässt sich ein Minimumsprinzip beweisen. (ÜA)*

(b) Betrachte eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *von* (III.1) *für* Ω *zusammenhängend und* $g \geq 0$. *Dann folgt* $u > 0$ *in* Ω *falls* $g \neq 0$

eindeutig

Theorem III.8. *(Eindeutigkeit) Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt. Sei* $g \in C(\partial\Omega)$, $\rho \in C(\Omega)$. *Dann existiert höchstens eine Lösung* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *von*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \rho \ \textit{in}\ \Omega, \\ u &= g \ \textit{auf}\ \partial\Omega. \end{aligned} \tag{III.5}$$

eq:poisson

Proof:. *Seien* u_1, $u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *Lösungen von III.5. Dann gilt*

$$\begin{aligned} -\Delta(u_1 - u_2) &= 0 \ \textit{in}\ \Omega, \\ u_1 - u_2 &= 0 \ \textit{auf}\ \partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit dem Maximums- und Minimumsprinzip folgt u_1 - u_2 = *0.*

III.3. Regularität

thm:mwecinf

Theorem III.9. *$u \in C^2(\Omega)$ besitze die Mittelwertseigenschaft auf Ω. $\Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$.*

Proof:. *Sei η_ϵ ein radialsymmetrischer Mollifier. Setze $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$ in $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : \text{ dist}(\mathbf{x},\ \partial\Omega) > \epsilon\}$. $\Rightarrow u^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$. Es gilt nun*

$$\begin{aligned} u^\epsilon(\mathbf{x}) &= \int\limits_\Omega \eta_\epsilon\left(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right)u(\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbf{y} = \int\limits_{B(\mathbf{x},\ \epsilon)} \eta_\epsilon\left(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right)u(\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbf{y} \\ &= \int\limits_0^\epsilon \int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\ r)} \eta_\epsilon\left(r\right)u(r,\ \cdot)dSdr = \int\limits_0^\epsilon \eta_\epsilon \int\limits_{\partial B(x,\ r)} (r)u(r,\ \cdot)dSdr \\ &= \int\limits_0^\epsilon \eta_\epsilon \left|\partial B(x,\ r)\right| u(x)dr = \int\limits_{B(x,\ \epsilon)} \eta_\epsilon(|x-y|)dyu(x) \\ &= u(x),\ x \in \Omega_\epsilon, \end{aligned}$$

d.h. $u \in C^\infty(\Omega)$. Dabei haben wir im vierten Schritt verwendet, dass η_ϵ radialsymmetrisch und somit konstant auf der Kugelschale ist. Außerdem erlaubt die Mittelwertseigenschaft von u den sechsten Schritt.

Bemerkung III.10. *Theorem III.9 sagt nichts über das Verhalten von u am Rand aus.*

III.4. Lokale Abschätzungen für harmonische Funktionen

thm:abschabl

Theorem III.11. *Sei u harmonisch in Ω. Dann gilt*

$$|(\nabla^\alpha)(\mathbf{x_0})| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\ r))} \tag{III.6}$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x_0}, r) \subset\subset \Omega$ und jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k$. Hier ist

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)},\ C_k = \frac{(2^{n-1}nk)^k}{\alpha(n)}.$$

Proof:. *via Induktion.*
Fall $k = 0$ folgt aus MWE (ÜA).
Fall $k = 1$: (Beachte $\partial_i u$ ist harmonisch.) Mit der Mittelwerteigenschaft und Korollar III.2 folgt dann

$$|\partial_i u(\mathbf{x_0})| = \left| \fint\limits_{B(\mathbf{x_0},\ \frac{r}{2})} \partial_i u \right| = \left| \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int\limits_{\partial B(\mathbf{x_0},\ \frac{r}{2})} u\nu_i \right| \leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(\mathbf{x_0},\ \frac{r}{2}))}.$$

Hierbei haben wir in letzten Schritt $\left|\partial B(\mathbf{x_0},\, \frac{r}{2})\right| = \frac{r\alpha(n)}{2n}$ *verwendet. Wegen* $x \in \partial B(\mathbf{x_0},\, \frac{r}{2})$ *folgt* $B(\mathbf{x_0},\, \frac{r}{2}) \subseteq B(\mathbf{x_0},\, r) \subseteq \Omega$.

$$\Rightarrow |u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\, r))}.$$

$$\Rightarrow |\partial_i u(\mathbf{x_0})| \leq \frac{2n}{r\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\, r))} = \frac{n}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^{n+1} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\, r))}.$$

Die Behauptung gelte nun für k-1. Dann gilt für α *mit* $|\alpha| = k$*, dass* $D^\alpha u = \partial_i D^\beta u$ *für ein* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *und* β *mit* $|\beta| =$ *k-1. Wie oben gilt*

$$|\nabla^\alpha u(\mathbf{x_0})| \leq \frac{nk}{r} \left\|D^\beta u\right\|_{L^\infty(\partial B(\mathbf{x_0},\, \frac{r}{k}))}$$

und für $x \in \partial B(\mathbf{x_0},\, \frac{r}{k})$ *gilt* $B(\mathbf{x},\, \frac{k-1}{k} r) \subseteq B(\mathbf{x_0},\, r) \subseteq \Omega$. *Wie oben folgt mit (ÜA)*

$$\left|(D^\beta u)(\mathbf{x})\right| \leq \frac{\left(2^{n+1} n(k-1)\right)^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{k-1}{k} r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\, r))},$$

$$|(\nabla^\alpha u)(\mathbf{x_0})| \leq \frac{\left(2^{n+1} nk\right)^k}{\alpha(n) r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,\, r))}.$$

III.5. Liouville

Liouville

Theorem III.12. *Sei* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.*

Proof:. *Sei* $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. *Dann folgt mit Satz III.11*

$$|(\nabla u)(\mathbf{x_0})| \leq \frac{2^{n+1} n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x_0},\, r))} \leq \frac{2^{n+1} n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \alpha(n) r^n \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{C}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $|(\nabla u)(\mathbf{x_0})| = 0$ *folgt für* $r \to \infty$. *Dann ist u konstant.*

III.6. Analytische versus harmonische Funktionen

Analytisch

Theorem III.13. *Sei u harmonisch in* Ω*, d.h. für alle* $\mathbf{x_0} \in \Omega$ *existiert ein* $x > 0$*, sodass*

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^n}{n!} (D^\alpha u)(\mathbf{x_0}),\ \mathbf{x} \in B(\mathbf{x_0},\, r).$$

Proof:. *Beweisidee: Zeige mithilfe von III.11, dass die Taylorreihe konvergiert. (ÜA)*

III.7. Harnack-Ungleichung

thm:harmungl

Theorem III.14. *Sei $V \subset\subset \Omega$ zusammenhängend. Dann existiert ein $C > 0$, welches nur von V abhängt, sodass*

$$\sup_{\mathbf{x}\in V} u(\mathbf{x}) \leq C \inf_{\mathbf{x}\in V} \cdot u(\mathbf{x})$$

für alle nicht-negativen harmonischen Funktionen $u \in C^2(\Omega)$ gilt. Insbesondere ist für alle $x, y \in V$ erfüllt:

$$\frac{1}{C} \cdot u(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x}) \leq C \cdot u(\mathbf{y}).$$

Proof:. *Sei $r := \frac{1}{4} dist(V,\, \partial\Omega)$. Wähle $x, y \in V$ mit $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq r$. Dann gilt*

$$u(\mathbf{x}) \overset{MWE}{=} \fint_{B(\mathbf{x},\,2r)} u(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mathbf{z} \geq \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(\mathbf{y},\,r} u(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mathbf{z} = \frac{1}{2^n} \fint_{B(\mathbf{y},\,r} u(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mathbf{z} \overset{MWE}{=} \frac{1}{2^n} u(\mathbf{y}).$$

$$\Rightarrow 2^n u(\mathbf{y}) \geq u(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2^n} u(\mathbf{y}),\ \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r.$$

Überdecke $\bar{V}$ mit endlich vielen Kugeln mit Radius $\frac{r}{2}$. ($V \subset\subset \Omega$) und $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ für $i = 2, \ldots, N$. Dann folgt $u(x) \geq \frac{1}{2^{nN}} u(y)$ für alle x,y $\in$ V.

In den folgenden Abschnitten werden wir eine Darstellung der Lösung der *Poisson-Gleichung*

$$\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n \tag{III.7}$$

eq:poiss

der Form $u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} = (k * f)(\mathbf{x})$ mit einer geeigneten Funktion k herleiten. Die Funktion k heißt *Fundamentallösung*. Im nächsten Abschnitt diskutieren wir zunächst einige benötigte Resultate aus der Distributionentheorie.

IV. Einführung in die Distributionentheorie

IV.1. Der Raum der Testfunktionen D(Ω)

In diesem Kapitel sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets offen. Wir setzen

$$\mathrm{D}(\Omega) = \{u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega) : \text{ supp u ist kompakt}\} = \mathrm{C}_c^\infty(\Omega).$$

Eine Funktion $\varphi \in \mathrm{D}(\Omega)$ heiße Testfunktion.

Beispiel IV.1. *φ definiert über*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \|\mathbf{x}\| < 1, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| \geq 1, \end{cases}$$

ist eine Testfunktion mit $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Definition & Lemma IV.2. *Sei $(\varphi_j) \in D(\Omega)$ und $\varphi \in D(\Omega)$. Dann ist $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j = \varphi$ in $D(\Omega)$ $:\Leftrightarrow$*

(i) *$\exists K \Subset \Omega$ mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$, $j \in \mathbb{N}$,*

(ii) *$\lim\limits_{j\to\infty} \|D^\alpha(\varphi_j - \varphi)\| = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.*

grenzwert **Theorem IV.3.** *Seien (φ_j), $(\psi_j) \subset D(\Omega)$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j = \varphi$ und $\lim\limits_{j\to\infty} \psi_j = \psi$ für φ, $\psi \in D(\Omega)$. Dann gilt*

(a) *$\lim\limits_{j\to\infty} (\alpha\varphi_j + \beta\psi_j) = \alpha\varphi + \beta\psi$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

(b) *$\lim\limits_{j\to\infty} \nabla^\alpha \varphi_j = \nabla^\alpha \varphi$, für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, d.h $\nabla^\alpha : D(\Omega) \to D(\Omega)$ ist stetig.*

Definition & Lemma IV.4. *Setze $D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \mathbb{C} : T \text{ linear und stetig}\}$, wobei*

$$T: D(\Omega) \to \mathbb{C} \text{ stetig } :\Leftrightarrow \lim_{j\to\infty} \varphi_j = \varphi in D(\Omega) \Rightarrow \lim_{j\to\infty} T\varphi_j = T\varphi.$$

Wir schreiben

$$< T, \varphi > := T(\varphi).$$

$T \in D'(\Omega)$ heißt Distribution.

thm:linearedistr **Theorem IV.5.** *Sei $T : D(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear. Dann sind äquivalent:*

(a) $T \in D'(\Omega)$,

(b) $\forall K \Subset \Omega \exists C > 0, N(K,T): \; |T\varphi| \leq C \cdot \sum_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty$, $\varphi \in D(\Omega)$

mit supp $\varphi_N \subset K$.

Proof:. (a) $\Rightarrow$ (b):
Annahme: Die Behauptung ist falsch. Dann existiert $K \Subset \Omega$ *so, dass für alle* $N \in \mathbb{N}$ *ein* $\varphi_N \in D(\Omega)$ *mit*

$$\operatorname{supp} \varphi_N \subset K \text{ und } |T\varphi_n| > N \sum_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha \varphi_N\|_\infty$$

existiert. Setze $\phi_N = \varphi_N / |T\varphi_n|$. *Dann gilt* $\lim_{N\to\infty} \phi_N = 0$, *aber* $|T\phi_N| = \frac{T\varphi_N}{|T\varphi_N|} = 1$, *was einen Widerspruch zur Stetigkeit darstellt.*
(b) $\Rightarrow$ (a): *(ÜA).*

Bemerkung IV.6. *In der Situation von Satz IV.5 heißt* T von der Ordnung N auf K. *Fall T von der Ordnung N ist für alle* $K \subset \Omega$ *kompakt, so heißt T von der* Ordnung N auf Ω.

Beispiel IV.7. **(a)** *Die* Dirac'sche δ_a-Distribution. *Für* $a \in \Omega$ *setze* $\langle \delta_a, \; \varphi \rangle := \varphi(a)$, $\varphi \in D(\Omega)$. *Falls* $0 \in \Omega$ *schreiben wir* $\delta_0 = \delta$.

(b) *Der* Cauchy-Hauptwert.
Sei $\Omega = \mathbb{R}$. *Wir setzen*

$$\left\langle (pv)(\frac{1}{x}), \; \varphi \right\rangle := \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x|>0} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \; \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Beachte: $\frac{1}{x} \notin L_{loc}(\mathbb{R})$.

(c) *Sei* $\Omega = \mathbb{R}$. $\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \; \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\epsilon} \varphi(x) dx.$

(d) *Für* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *ist* $T_f : \; D(\Omega) \to \mathbb{C}$ *definiert über*

$$\langle T_f, \; \varphi \rangle := \int\limits_{\Omega} f\varphi dx.$$

Proof:. *(b) Sei* $(\varphi_j) \subset D(\Omega)$ *mit* $\lim_{j\to\infty} \varphi_j = 0$. *Dann existiert ein* $a > 0$, *sodass supp* $\varphi \subseteq [-a, \; a]$, $j \in \mathbb{N}$. *Es gilt nun*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{\epsilon\to 0} \left[\varphi_j(0) \int\limits_{\epsilon\leq|x|\leq a} \frac{1}{x} dx + \int\limits_{\epsilon\leq|x|\leq a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx \right]$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-a}^{0}\left\|\varphi_j'\right\|_\infty dx = 2a\left\|\varphi_j'\right\|_\infty \;\to 0 \textit{ für } j\to\infty.$$

(d)Sei $(\varphi_j)\subset D(\Omega)$ *mit* $\lim_{j\to\infty}\varphi_j = 0$ *in* $D(\Omega)$. *Dann existiert ein* $K\subset\Omega$ *kompakt mit supp* $\varphi_j \subset K$, $j\in\mathbb{N}$ *und* $\lim_{j\to\infty}\|\varphi_j\|_\infty = 0$. *Weiter gilt*

$$\lim_{j\to\infty}|\langle T_f,\ \varphi_j\rangle| = \lim_{j\to\infty}\left|\int_K f\varphi_j dx\right| \leq \lim_{j\to\infty}\|\varphi_j\|_\infty\int_K f dx = 0.$$

(a), (c) (ÜA).

susTfnull **Theorem IV.8.** *Es gilt* $T_f = 0$ *in* $D'(\Omega)$ *genau dann, wenn* $f\equiv 0$ *fast überall.*

Proof:. *Die Rückrichtung ist klar.*
$'\Rightarrow'$: *Sei* $T_f = 0$ *in D'(Ω). Dann gilt für* $K\subset\subset\Omega$, *dass* $\int_K f\varphi dx = 0$, $\varphi\in C_c^\infty(K)$. *Da* $f\in$ *D'(K) folgt* $f\equiv 0$ *fast überall (ÜA).*

IV.2. Elemetare Operationen mit Distributionen

IV.2.1. Multiplikation mit einer Funktion

Sei $a\in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$, $T\in D'(\Omega)$. Wir definieren $\langle aT,\varphi\rangle = \langle T, a\varphi\rangle$, $\varphi\in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$.

Beispiel IV.9. (a) *Sei* $a\in C^\infty(\Omega)$ *mit* $0\in\Omega$. *Dann gilt* $a\delta = a(0)\delta$, *denn*

$$\langle a\delta,\varphi\rangle = \langle\delta, a\varphi\rangle = a(0)\varphi(0) = \langle a(0)\delta,\varphi\rangle\,,\quad \varphi\in D(\Omega).$$

(b) *Es gilt* $xpv(\frac{1}{x}) = T_{\mathbb{1}}$, *denn*

$$\left\langle xpv(\frac{1}{x}),\varphi\right\rangle = \left\langle pv(\frac{1}{x}), x\varphi\right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|x|>\epsilon}\frac{1}{x}x\,\varphi = \int_{\mathbb{R}}\varphi = \int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}\varphi = \langle T_{\mathbb{1}},\ \varphi\rangle\,,\ \varphi\in D(\mathbb{R}).$$

IV.2.2. Ableitung der Distribution

Nach Satz IV.3 (b) ist $\nabla^\alpha:\ \mathrm{D}(\Omega)\to\mathrm{D}(\Omega)$ stetig. Wir definieren für $T\in$ D'(Ω) und $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$,

$$\langle\nabla^\alpha T,\ \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T,\nabla^\alpha\varphi\rangle\,,\ \varphi\in\mathrm{D}(\Omega). \qquad \text{(IV.1)}$$ eq:diffDist

Bemerkung IV.10. (a) *Sei* $f\in C^\infty(\Omega)$. *Dann gilt für alle* $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$, *dass*

$$\langle\nabla^\alpha T_f,\ \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_f,\ \nabla^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f\nabla^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega(\nabla^\alpha f)\varphi = \langle T_{\nabla^\alpha f},\ \varphi\rangle\,,\ \varphi\in D(\Omega).$$

(b) $\nabla^\alpha\in\mathcal{L}(D'(\Omega))$ *für* $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$, *da* ∇^α *linear und stetig ist. (ÜA)*

(c) Leibnitz-Regel
Sei $a \in C^\infty(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$. Dann gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, dass $aT \in D'(\Omega)$ und

$$\nabla^\alpha(aT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\nabla^\beta a)(\nabla^{\alpha-\beta} T).$$

(d) *Sei $f \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gilt $\nabla^\alpha T_f = T_{\nabla^\alpha f}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$.*

Beispiel IV.11. (a) *Die* Heaviside-Funktion

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ist ein Element aus $D'(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left\langle H',\ \varphi \right\rangle &= -\left\langle H,\ \varphi' \right\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = -\varphi(x)|_0^\infty \\ &= \varphi(0) = \langle \delta,\ \varphi \rangle\,,\ \varphi \in D(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(b) *Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gilt*

$$\langle D^\alpha \delta,\ \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta,\ D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha \varphi)(0),\ \varphi \in D(\Omega).$$

(c) $(\log(|x|))' = \mathrm{pv}(\frac{1}{x})$, *denn*

$$\begin{aligned} \left\langle (ln(|x|))',\ \varphi \right\rangle &= -\left\langle ln(|x|),\ \varphi' \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} ln(|x|)\varphi'(x)dx \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} ln(|x|)\varphi'(x)dx + \int_\epsilon^\infty ln(|x|)\varphi'(x)dx \right) \\ &\overset{PI}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} -\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}dx - \varphi'(-\epsilon)ln(\epsilon) + \varphi'(\epsilon)ln(\epsilon) \right) \\ &\underset{\eta \in (-\epsilon,\epsilon)}{\overset{MWS}{=}} \left\langle pv(\frac{1}{x}),\ \varphi) \right\rangle + \lim_{\epsilon \to 0} \left[ln(\epsilon) 2\epsilon \varphi''(\eta) \right] = \left\langle pv(\frac{1}{x}),\ \varphi) \right\rangle,\ \varphi \in D(\Omega). \end{aligned}$$

IV.2.3. Der adjungierte Operator

Sei $A = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ und $T \in$ D'(Ω). Dann gilt

$$\langle AT,\ \varphi\rangle = \left\langle \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha T,\ \varphi \right\rangle \overset{\text{IV.1}}{=} \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle T,\ a_\alpha D^\alpha \varphi\rangle = \left\langle T,\ \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|},\ a_\alpha D^\alpha \varphi \right\rangle$$

$$= \langle T,\ A^* \varphi\rangle\ ,\ \ \varphi \in \mathrm{D}(\Omega).$$

$A^* := \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ heißt der zu A *adjungierte Operator* .

Beispiel IV.12. $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$. *Dann gilt* $\Delta = \Delta^*$.

IV.3. Faltung

Für $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ sei $(\tau_{\mathbf{a}}\varphi)(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Wir definieren die Translation von $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \tau_{\mathbf{a}} T, \varphi\rangle := \langle T, \tau_{-\mathbf{a}}\varphi\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Weiter sei $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(-\mathbf{x})$ für $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\langle \tilde{T}, \varphi\rangle := \langle T, \tilde{\varphi}\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Spiegelung.

:Faltung **Definition IV.13.** Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren die Faltung $T * \varphi$ via

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi\rangle.$$

Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt (ÜA)

$$(f * g)(x) = T_f(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}} g).$$

Beispiel IV.14. *Es gilt*

$$(\delta * \varphi)(\mathbf{x}) =< \delta, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi >= (\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi)(0) = \varphi(\mathbf{x}),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

d.h. $\delta * \varphi = \varphi$.

FaltDiff **Theorem IV.15.** *Sei* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *Dann gilt* $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $\partial_j(T * \varphi) = (\partial_j T) * \varphi = T * (\partial_j \varphi), j = 1, \ldots, n.$

Proof:. *Schritt 1:* $T * \varphi$ *ist stetig*
Für $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ *gilt:*

$$\tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi(\mathbf{y}) - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere folgt:

$$\lim_{\mathbf{x}' \to \mathbf{x}} \tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi = \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \text{ d.h.}$$

$$\lim_{\mathbf{x}' \to \mathbf{x}} \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}'}\varphi \rangle = \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle.$$

Also

$$\lim_{\mathbf{x}' \to \mathbf{x}} (T * \varphi)(\mathbf{x}') = (T * \varphi)(\mathbf{x}).$$

Schritt 2:
Sei $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. *Dann gilt für* $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$*:*

$$\frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = \frac{1}{h}[\varphi(\mathbf{x} + he_i - y) - \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y})],\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

d.h.

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), i = 1, \ldots, n.$$

Also:

$$\begin{array}{rcc} \partial_i(T * \varphi)(\mathbf{x}) & = & \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} < T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi > \\ & = & \lim_{h \to 0} < T, \frac{1}{h}\tilde{\tau}_{\mathbf{x}+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi > \\ & = & < T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) > \\ & = & (T * (\partial_i\varphi))(\mathbf{x}),\ i = 1, \ldots, n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \end{array}$$

$\Rightarrow \partial_i(T * \varphi)(\mathbf{x}) = (T * \partial_i\varphi)(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
$\Rightarrow \partial_i(T * \varphi)$ *stetig in* $\mathbb{R}^n$.
$\Rightarrow T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Schritt 3:
Wegen

$$\partial_{\mathbf{y}_i}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_{\mathbf{x}_i}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, n$$

folgt

$$\partial_{\mathbf{x}_i}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) = -\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_{\mathbf{x}_i}\varphi)\ i = 1, \ldots, n$$

und damit

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}_i}(T * \varphi)(\mathbf{x}) &= (T * \partial_i\varphi)(\mathbf{x}) = \langle T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}(\partial_i\varphi) \rangle = -\langle T, \partial_{\mathbf{x}_i}(\tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi) \rangle \\ &= \langle \partial_i T, \tilde{\tau}_{\mathbf{x}}\varphi \rangle = ((\partial_i T) * \varphi)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

IV.4. Fundamentallösung

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$. Dann gilt für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

ist eine Lösung im Sinne von Distributionen, da

$$Au = A(T * f) = (AT * f) = (\delta * f) = f.$$

Fundloes

Definition IV.16. Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$. Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$ heißt *Fundamentallösung* von A in $\mathbb{R}^n$.

V. Fundamentallösungen

In diesem Abschnitt berechnen wir einige Fundamentallösungen explizit. Im Allgemeinen kann man allerdings nicht erwarten, dass eine Fundamentallösung explizit berechnet werden kann.

m:Lap-Op **Theorem V.1** (Laplace-Operator)**.** *Für* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *setze*

$$N(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)} |\mathbf{x}|^{2-n} & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} log|\mathbf{x}| & n = 2 \\ \frac{1}{2}|\mathbf{x}| & n = 1 \end{cases}$$

Dann ist $N \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *und es gilt*

$$\Delta N = \delta \text{ (i. S. v. Distributionen).}$$

Proof:. *Sei* $n \geq 3$. *Für* $\epsilon > 0$ *setze*

$$N^\epsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{2-n}{2}}.$$

Dann gilt: $N^\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\begin{aligned} \partial_j N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{2-n}{2}-1} \frac{2-n}{2} 2\mathbf{x}_j = \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}} \mathbf{x}_j \\ \partial_j^2 N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{n}{2} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} 2\mathbf{x}_j \mathbf{x}_j + \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}} \\ &= \frac{-1}{\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} \mathbf{x}_j^2 + \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}} \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1} [-n\mathbf{x}_j^2 + (|\mathbf{x}|^2 + \epsilon^2)], \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Mit Lebesgue folgt:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \langle N - N^\epsilon, \Delta\varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Weiter gilt

$$\langle N^\epsilon, \Delta\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} N^\epsilon \Delta\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta N^\epsilon)\varphi, \ \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\begin{aligned}\Delta N^\epsilon(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \partial_i^2 N^\epsilon(\mathbf{x})\\ &= \frac{1}{n\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2+\epsilon)^{\frac{-n}{2}-1}[-n|\mathbf{x}|^2+n|\mathbf{x}|^2+n\epsilon^2]\\ &= \frac{1}{\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2+\epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1}\epsilon^2 =: \rho^\epsilon(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1}{\epsilon^n}\rho^1(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}) = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{\alpha(n)}((\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon})^2+1)^{\frac{-n}{2}-1} = \frac{1}{\alpha(n)}(|\mathbf{x}|^2+\epsilon^2)^{\frac{-n}{2}-1}\epsilon^2 = \rho^\epsilon(x)$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\rho^1(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\alpha(n)}(|\mathbf{y}|^2+1)^{\frac{-n}{2}-1}\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_0^\infty n\frac{r^{n-1}}{(r^2+1)^{\frac{n}{2}+1}}\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty n\frac{s^{\frac{n-2}{n}}}{(s+1)^{\frac{n}{2}+1}}\,\mathrm{d}s = \frac{n}{2}\beta(\frac{n}{2},1) = \frac{n}{2}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = 1\end{aligned}$$

ist f^ϵ ist ein Mollofier. Daraus folgt:

$$\lim_{\epsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \lim_{\epsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon(-\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle, \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Fall n=1,2 (ÜA).

thm:Wellengl

Theorem V.2. *(Wellengleichung) Sei $E:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert über*

$$E(t,x) = \begin{cases}\frac{1}{2} & t>|x|\\ 0 & t\le|x|\end{cases}.$$

Dann ist $E\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\partial_t^2E-\partial_x^2E=\delta.$$

Proof:. *(ÜA)*

VI. Greenfunktionen

In diesem Abschnitt sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ stets offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, && \text{in } \Omega, \\ u &= g, && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{VI.1}$$

eq:VI.1

VI.1. Herleitung der Greenfunktion

sec:HdG

Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ beliebig und seien $\mathbf{x} \in \Omega$ und $\epsilon > 0$ so, dass $B(\mathbf{x}, \epsilon) \subset \Omega$. Weiter sei N die Fundamentallösung des Δ und $V_\epsilon := \Omega \backslash B(x, \epsilon)$. Mit der Green'schen Formel folgt:

$$\int\limits_{V_\epsilon} u(\mathbf{y})(\Delta N)(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y} \tag{VI.2}$$

eq:VI.2

$$= \int\limits_{\partial V_\epsilon} u(\mathbf{y})\partial_\nu N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \tag{VI.3}$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale auf ∂V_ϵ ist.

Wegen $\Delta N(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0$ für $x \neq y$ ergibt sich mit der Darstellung der Fundamentallösung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) \;\; \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \right| &\leq c\epsilon^{n-1} \max_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} |N| \\ &\leq c\epsilon^{n-1} \begin{cases} \epsilon^{2-n} & n \geq 3 \\ |\log \epsilon| & n = 2 \\ |\epsilon| & n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Weiterhin gilt $\nabla N(\mathbf{y}) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n}$ für $y \neq 0$ (Ü.A.) und es folgt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} u(\mathbf{y})\partial_\nu N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\ \mathrm{d}S(\mathbf{y}) &= -\int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} u(\mathbf{x}+\mathbf{y})\ \nu \cdot \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n}\ \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \cdot \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^n}\ \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{y}|^{n-1}}\ \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} u(\mathbf{x}+\mathbf{y})\ \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= \fint\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} u(\mathbf{y})\ \mathrm{d}S(\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

Damit können wir in (VI.2) zum Grenzwert $\epsilon \to 0$ übergehen und erhalten:

$$
u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\partial_\nu N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\ \mathrm{d}S(\mathbf{y}) - \int\limits_{\Omega} N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})\ \mathrm{d}y. \quad \text{(VI.4)}
$$

eq: 3

Gleichung (VI.4) erlaubt uns u zu bestimmen, falls wir Δu in Ω und u, $\partial_\nu u$ auf $\partial\Omega$ kennen. Leider gibt uns (VI.1) keine Informationen über $\partial_\nu u$ auf $\partial\Omega$. Wir würden allerdings unsere PDE überbestimmen, wenn wir die Werte von $\partial_\nu u$ auf $\partial\Omega$ zusätzlich vorschreiben würden. Daher gehen wir folgender Idee nach:

Idee. *Finde für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ eine Funktion $N^{\mathbf{x}} = N^{\mathbf{x}}(y)$ mit den Eigenschaften*

$$
\begin{aligned}
\Delta N^{\mathbf{x}} &= 0, && \textit{in } \Omega, \\
N^{\mathbf{x}} &= N(\mathbf{y}-\mathbf{x}), && \textit{auf } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Angenommen wir haben eine solche Funktion bereits gefunden. Mit den Greenschen Formeln folgt dann

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_{\Omega} N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbf{y} &= \int\limits_{\partial\Omega} u(\mathbf{y})\partial_\nu N^{\mathbf{x}}(y) - N^{\mathbf{x}}(y)\partial_\nu u(\mathbf{y})\ \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} u(\mathbf{y})\partial_\nu N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y})\ \mathrm{d}S(\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

und damit erhalten wir aus (VI.4) die Darstellung

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= \int\limits_{\partial\Omega} N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\partial_\nu N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) - \int\limits_{\Omega} N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} \\
&\quad - \int\limits_{\partial\Omega} N(\mathbf{y}-\mathbf{x})\partial_\nu u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) + \int\limits_{\partial\Omega} u(\mathbf{y})\partial_\nu N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) + \int\limits_{\Omega} N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} \\
&= -\int\limits_{\partial\Omega} u(\mathbf{y})\partial_\nu\left(N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\right)\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) - \int\limits_{\Omega}\left(N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\right)\Delta u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y},
\end{aligned}
$$

welche den ungeliebten Term $\partial_\nu u$ nicht mehr enthält. Diese führt uns zur Definition der Greenfunktion.

Definition VI.1. Die Funktion $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, heißt *Greenfunktion in* Ω. Setzen wir die Definition von G in obige Darstellung von u ein, so sehen wir, dass in diesem Fall ist die Lösung von (VI.1)durch

$$
u(\mathbf{x}) = -\int\limits_{\partial\Omega} g(\mathbf{y})\partial_\nu G(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) - \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{VI.5}
$$

eq: 4

gegeben ist.

Bemerkung VI.2. *Sei* $\mathbf{x} \in \Omega$. *Dann erfüllt* $G_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ *die Gleichung*

$$
\begin{aligned}
-\Delta G_{\mathbf{x}} &= \delta_{\mathbf{x}}, \quad \textit{in } \Omega, \\
G_{\mathbf{x}} &= 0 \qquad \textit{auf } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Proof:. *Ü.A.*

VI.2. Eigenschaften der Greenfunktion

hm: VI.3

Theorem VI.3. *Für* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Omega$ *mit* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ *gilt* $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

Proof:. *Wir schreiben* $G_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = G(\mathbf{x},\mathbf{z})$ *und* $G_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) = G(\mathbf{y},\mathbf{z})$ *für* $\mathbf{z} \in \Omega$. *Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
\Delta G_{\mathbf{x}} &= 0, \quad z \neq x, \\
\Delta G_{\mathbf{y}} &= 0, \quad z \neq y, \\
G_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) &= 0, \quad \textit{auf } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Setze $V = \Omega \setminus \{B(\mathbf{x},\epsilon) \cup B(\mathbf{y},\epsilon)\}$ *für* $\epsilon > 0$ *klein genug. Mit den Greenschen Formeln und obigen Eigenschaften von* $G_{\mathbf{x}}$ *und* $G_{\mathbf{y}}$ *folgt:*

$$
\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} (\partial_\nu G_{\mathbf{x}})\,G_{\mathbf{y}} - (\partial_\nu G_{\mathbf{y}})\,G_{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}) = \int\limits_{\partial B(\mathbf{y},\epsilon)} (\partial_\nu G_{\mathbf{y}})\,G_{\mathbf{x}} - (\partial_\nu G_{\mathbf{x}})\,G_{\mathbf{y}}\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}).
$$

Da $G_{\mathbf{y}}$ glatt nahe bei $\mathbf{x}$ ist, gilt analog zu Abschnitt VI.1.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} (\partial_\nu G_{\mathbf{y}})\, G_{\mathbf{x}}\, \mathrm{d}S(\mathbf{z})\right| \le \lim_{\varepsilon\to 0} c\epsilon^{n-1} \sup_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} |G_{\mathbf{x}}| = 0$$

und da $G_{\mathbf{x}} = N(\mathbf{x}-\mathbf{z}) - N^{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ mit $N^{\mathbf{x}}$ glatt in Ω gilt, erhalten wir mit der aus Abschnitt VI.1 bekannten Rechnung:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} (\partial_\nu G_{\mathbf{x}})\, G_{\mathbf{y}}\, \mathrm{d}S(\mathbf{z}) = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} \partial_\nu N(\mathbf{x}-\mathbf{z}) G_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})\, \mathrm{d}S(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}).$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)} (\partial_\nu G_{\mathbf{x}})\, G_{\mathbf{y}} - (\partial_\nu G_{\mathbf{y}})\, G_{\mathbf{x}}\, \mathrm{d}S(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

und völlig analog natürlich auch

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\partial B(\mathbf{y},\epsilon)} (\partial_\nu G_{\mathbf{y}})\, G_{\mathbf{x}} - (\partial_\nu G_{\mathbf{x}})\, G_{\mathbf{y}}\, \mathrm{d}S(\mathbf{z}) = G_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Erinnern wir uns jetzt noch daran, dass nach dem ersten Schritt des Beweis beide Limiten gleich sind, folgt wie gewünscht $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

VI.3. Die Greenfunktion im Halbraum

In diesem Abschnitt bezeichne N wieder die Fundamentallösung von Δ in $\mathbb{R}^n$. Wie in Abschnitt VI.1 gezeigt, müssen wir für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ eine Funktion $N^{\mathbf{x}} = N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta N^{\mathbf{x}} &= 0, && \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ N^{\mathbf{x}} &= N(\mathbf{y}-\mathbf{x}), && \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+, \end{aligned}$$

bestimmen, um die Greenfunktion im Halbraum angeben zu können.

Idee (Reflexion)**.** *Setze $N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = N(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})$, wobei $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1,\cdots,x_{n-1},-x_n)$ die Spiegelung von x an $\partial\mathbb{R}^n_+$ ist.*

Wegen $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+$ gilt damit $\Delta N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Delta_{\mathbf{y}} N(\mathbf{y}-\mathbf{x}\ ) = 0$ für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+$ und nach Definition gilt $N^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = N(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) = N(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ für $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Diese Beobachtung liefert uns unmittelbar

Theorem VI.4. *Die Greenfunktion in $\mathbb{R}^n_+$ ist $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = N(\mathbf{y}-\mathbf{y}) - N(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.*

Proof:. *Ü.A.*

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ u &= g, \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{aligned} \tag{VI.6}$$ eq: 5

Eine direkte Rechnung zeigt zunächst:

$$\partial_{\mathbf{y}_n} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \partial_{\mathbf{y}_n} N(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \partial_{\mathbf{y}_n} N(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{n\alpha(n)}\left[\frac{y_n - x_n}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}|^n}\right].$$

Damit folgt

$$\partial_\nu G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\partial_{\mathbf{y}_n} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}, \quad \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+,$$

und Formel (VI.5) liefert und eine Darstellung der Lösung u von (VI.6) :

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\,\mathrm{d}\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+. \tag{VI.7}$$ eq: 6

Die Funktion $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}$ definiert für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ heißt *Poissonkern*. Es gilt nun

Theorem VI.5. *Sei $g \in BC(\mathbb{R}^{n-1})$ und u durch* (VI.7) *gegeben. Dann gilt*

(a) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

(b) $\Delta u = 0$ *in* $\mathbb{R}^n_+$.

(c) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0)$ *für* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n_+$.

Proof:. *Wir unterteilen den Beweis in 3 Schritte.*

Schritt 1: Sei $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ fest. Dann ist $\mathbf{y} \mapsto G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ harmonisch für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\mathbf{x}\}$. Wegen Satz VI.3 gilt $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$, so dass für $\mathbf{y} \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ harmonisch für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\mathbf{y}\}$. Insbesondere ist $\mathbf{x} \mapsto K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\partial_{\mathbf{y}_n} G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ harmonisch für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$.

Schritt 2: Es gilt (Ü.A. für Freunde des Rechnens):

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = 1.$$

Insbesondere erhalten wir für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ die Abschätzung

$$|u(\mathbf{x})| = \left|\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y})g(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\right| \le \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)} \|K(\mathbf{x},\cdot)\|_{L^1(\partial\mathbb{R}^n_+)} = \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)}.$$

Dies liefert uns $\|u\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)} \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)}$. *Da* $\mathbf{x} \mapsto K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *harmonisch für* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ *folgt* $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ *(Ü.A.). Daher gilt*

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Delta_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+.$$

Es bleibt also nur noch (c) zu zeigen.

Schritt 3: Sei $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$ *und* $\epsilon > 0$. *Wähle* $\delta > 0$ *derart, dass für alle* $|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0| < \epsilon$ *für* $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ *mit* $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| \leq \delta$ *gilt. Damit folgt:*

$$\begin{aligned}
|u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| &= \left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \left[g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x_0})\right] \,\mathrm{d}\mathbf{y} \right| \\
&\leq \left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B(\mathbf{x}_0,\delta)} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \left[g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x_0})\right] \,\mathrm{d}\mathbf{y} \right| \\
&\quad + \left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(\mathbf{x}_0,\delta)} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \left[g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x_0})\right] \,\mathrm{d}\mathbf{y} \right| \\
&:= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Nach Wahl von δ *gilt*

$$I_1 \leq \epsilon \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y} = \epsilon.$$

Den zweiten Term schätzen wir für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ *mit* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ *durch*

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq 2\,\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(\mathbf{x}_0,\delta)} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y} \\
&\leq 2\,\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)} \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(\mathbf{x}_0,\delta)} \frac{2^n}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|^n} \,\mathrm{d}\mathbf{y} = c x_n
\end{aligned}$$

ab, wobei wir genutzt haben, dass für $\mathbf{x}$ *wie oben und* $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(\mathbf{x}_0,\delta)$ *nach umgekehrter Dreiecksungleichung* $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|$ *gilt. Für* $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ *folgt somit* $I_1 + I_2 \to 0$ *und wir haben auch (c) nachgewiesen.*

Index