Partielle Differentialgleichungen I

Matthias Geissert

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Wir betrachten einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung und wollen die Wärmeleitung untersuchen. Dazu treffen wir folgende Annahmen:

- Der Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall $[0, 1]$ und $u(x, t)$ ist die Temperatur an der Stelle x zum Zeitpunkt t.
- Konstanten: ρ Dichte, c spezifische Wärme
- $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Wärmequelle
- Energie in Segment $[x_1, x_2] : E(x_1, x_2, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(x_1, t)$
- Sei $Q(x, t)$ die thermische Energie durch den Punkt x zum Zeitpunkt t und K_0 die thermale Konduktivität. Dann gilt
$$\frac{Q(x, t_2) - Q(x, t_1)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(x, t_1).$$
- Energieerhaltung:
$$c\rho(x_2 - x_1)(u(x_1, t_2) - u(x_1, t_1)) =$$
$$(t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1)\left(\frac{\partial}{\partial x}(u(x_1, t_1) - u(x_2, t_1))\right).$$

Daraus folgt

$$\frac{u(x_1, t_2) - u(x_1, t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u(x_1, t_1) - u(x_2, t_1)}{x_1 - x_2}\right)$$

und somit

$$\partial_t u(x_1, t_1) = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_1, t_1), \tag{.1}$$

wobei $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ die Konstante der thermischen Diffusivität ist. Gleichung (.1) heißt Wärmeleitungsgleichung. Bei stationärer Temperaturverteilung gilt $0 = \partial_t u(x, t)$ und damit

$$0 = f(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t).$$

Partielle Differentialgleichungen tauchen also in natürlicher Weise in Anwendungen auf. Im Rahmen dieser Vorlesung sind partielle Differentialgleichungen immer ohne Herleitung gegeben.

I. Einführung

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets ein Gebiet.

Definition I.1.

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), ..., Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in \Omega \tag{I.1}$$

heißt partielle Differentialgleichung (PDE) k-ter Ordnung.
Hier ist $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht.

Wir untersuchen folgende Typen von PDE's.

Definition I.2. PDE (I.1) heißt

(a) *linear*, falls
$$F(D^k u(x), \ldots, x) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x) D^\alpha u - f(x),$$

(b) *semi-linear*, falls
$$F(D^k u(x), \ldots, x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \ldots, x)$$
für $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ und $a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben,

(c) *quasi-linear*, falls
$$F(D^k u(x), \ldots, x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \ldots, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \ldots, x)$$
für $a_\alpha, a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben und

(d) *voll nicht-linear*, falls in der Situation von (c) a_α auch von $D^k u$ abhängt.

Später werden wir sehen, dass sich der semi- und der quasi-lineare Fall mit Hilfe eines Fixpunktarguments auf den linearen Fall reduzieren lassen, wobei der quasi-lineare Fall technisch schwieriger ist. Später werden wir auch weitere Typen linearer PDE's diskutieren.

Definition I.3.

$$\mathbb{F}(D^k u(x), \ldots, x) = 0, \quad x \in \Omega \tag{I.2}$$

heißt System von PDE's k-ter Ordnung. Hier ist $\mathbb{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \cdots \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ gesucht.

Beispiel I.4.

(a) Laplace Gleichung:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u = 0$$

(b) Transportgleichung:

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i u = 0$$

(c) Wärmeleitungsgleichung:

$$u_t - \Delta u = 0$$

(d) Wellengleichung:

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

(e) Sei $\Omega \infty \mathbb{R}^n$. *Navier-Stokes-Gleichung:*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= f \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \end{aligned}$$

Hier ist $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *das gesuchte* Geschwindigkeitsfeld *und* $p : \Omega \to \mathbb{R}$ *der gesuchte* (Druck). *Das Anfangsgeschwindigkeitsfeld* $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *ist gegeben.*

Damit die PDE's eindeutig lösbar sind, müssen noch entsprechende Randbedingungen gefordert werden.

Typische Fragestellungen, die im Rahmen dieser Vorlesung untersucht werden sind:

(a) Existenz

(b) Eindeutigkeit

(c) Regularität

(d) Abbildungsverhalten der Gleichung (Beispielsweise besitzt $u - \Delta u = f$ genau dann eine eindeutige Lösung $u \in X$, wenn $f \in Y$, d.h. $(1 - \Delta) : X \to Y$ ist ein Isomorphismus.)

(e) Weitere Eigenschaften der Lösung

In den folgenden Kapiteln diskutieren wir unterschiedliche Zugänge zur Beantwortung dieser Fragen. Leider lässt sich in nur wenigen Fällen die Lösung einer PDE explizit berechnen. Daher werden im Rahmen dieser Vorlesung sowohl "explizite" als auch abstrakte Methoden (welche zumindest erlauben, einige Aussagen über die Lösung zu treffen) vorgestellt.

II. Die Methode der Charakteristiken

II.1. Motivation anhand der Transportgleichung

Für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$\partial_t u + bDu = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \tag{II.1}$$
$$u = g, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \tag{II.2}$$

Idee: Finde Weg $X_{x_0} : I \to \mathbb{R}^{n+1}_+$ entlang dem sich u durch Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE) berechnen lässt. Um die Notation zu erleichten setze im Folgenden $X_{x_0}(s) = X(s)$ und $\partial_{n+1} = \partial_t$. Weiter sei

$$z(s) = u(X(s)), \quad P(s) = \begin{pmatrix} D_x u \\ \partial_t u \end{pmatrix}(X(s)), \quad z(0) = g(x_0).$$

Dann folgt mit der Kettenregel

$$\dot{z}(s) = \begin{pmatrix} D_x u \\ \partial_t u \end{pmatrix}(X(s)) \cdot \dot{X}(s) = P(s) \cdot \dot{X}(s). \tag{II.3}$$

Die Ableitung von $P(s)$ ergibt komponentenweise erneut mit der Kettenregel

$$(\dot{P}^i)(s) = \begin{pmatrix} D_x \partial_i u \\ \partial_t \partial_i u \end{pmatrix}(X(s)) \cdot \dot{X}(s), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Aus (II.1) folgt $\partial_i \partial_t u + bD\partial_i u = 0$ oder als Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} \partial_t \partial_i u \\ D_x \partial_i u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Setze $\dot{X}(s) = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h.

$$X(s) = \begin{pmatrix} x_0 + sb \\ s \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $\dot{p}^i(s) = 0$. Mit

$$P(0) = \begin{pmatrix} D_x u \\ \partial_i u \end{pmatrix}(x_0, 0)$$

folgt $P(s) = \begin{pmatrix} D_x u \\ \partial_i u \end{pmatrix}(x_0, 0)$. Gleichung (II.3) impliziert nun

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= P(s)\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = b(Du)(x_0, 0) + (\partial_t u)(x_0, 0) \overset{(II.1)}{=} 0 \\ z(0) &= g(x_0) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$u(x_0, 0) \overset{(II.2)}{=} g(x_0) = z(s) = u(X(s)) = u(\underbrace{x_0 + bs}_{:=x}, s),$$

d.h. $u(x, s) = u(x - bs, 0) = g(x - bs)$. Insgesamt erhalten wir

Theorem II.1. *Sei $k \in \mathbb{N}$, $g \in C^k(R^n)$. Dann löst*

$$u(x, s) = g(x - bs) \in C^k(\mathbb{R}^n \times (o, \infty))$$

die Transportgleichung (II.1).

Bemerkung II.2. *u ist nicht glatter als g.*

II.2. Allgemeiner Fall

Betrachte nun beliebige PDE 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} F(Du(x), u(x), x) &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \Gamma \end{aligned} \tag{II.4}$$

Hierbei ist $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega$ gegeben und glatt.

II.2.1. Herleitung einer ODE für z(s), p(s), X(s)

Wir definieren:

$$\begin{aligned} z(s) &= u(x(s)) \\ P(s) &= (Du)(X(s)) \end{aligned}$$

und berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= (Du)(X(s)) \cdot \dot{X}(s) = P(s) \cdot dotX(s) \\ \dot{P}^i(s) &= (D\partial_i u)(X(s)) \cdot \dot{X}(s), \quad i = 1, .., n \end{aligned}$$

Ziel: Elimiere Ableitungen 2. Ordnung. Aus (II.4) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \partial_{P_j} F(p(s), z(s), X(s))\partial_i\partial_j u + \partial_z F(P(s), z(s), X(s))\partial_i u \\ + \partial_i F(P(s), z(s), X(s)) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Also setze

$$\dot{X}^j(s) = \partial_{P_j} F(P(s), z(s), X(s)), \quad j = 1, .., n$$

Dann gilt

$$\dot{P}^i(s) = -\partial_{P_i} F(P(s), z(s), X(s)) P^i(s) - \partial_i F(P(s), z(s), X(s)), \quad i = 1, .., n$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{P}(s) &= -D_z F(P(s), z(s), X(s)) \cdot P(s) - D_x F(P(s), z(s), X(s)) \\ \cdot\, z(s) &= P(s)(D_P F)(P(s), z(s), X(s)) \\ \cdot\, X(s) &= (D_P F)(P(s), z(s), X(s)) \end{aligned} \tag{II.5}$$

Insbesondere erfüllt jede Lösung $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$ von (II.4) das System (II.5) solange $x(s) \in \Omega$.

II.2.2. OBdA Rand von Ω 'lokal flach'

Rand von Ω flach bedeutet $\Gamma \cong \mathbb{R}^n_+$. In einer Umgebung $U \subset \Gamma$ von $x_0 \in \Gamma$ lässt sich Γ durch Schieben und Drehen in den Graph einer glatten 'kleinen' Funktion $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ überführt. Setze nun

$$\begin{aligned} v(y) &= u(y_1, .., y_{n-1}, y_n + \phi(y_1, ..., y_{n-1})), \\ u(x) &= v(x_1, .., x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, ..., x_{n-1})), \\ \Phi(x) &= (x_1, .., x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, ..., x_{n-1})), \\ \Psi(x) &= (x_1, .., x_{n-1}, x_n + \phi(x_1, ..., x_{n-1})). \end{aligned}$$

Dann gilt wegen $(Du)(x) = (Dv)(y)(D\Phi)(x)$ die Gleichung

$$0 = F((Du)(x), u(x), x) = F((Dv)(y)(D\Phi)(x), v(y), \Psi(y)), \quad y = \Phi(x),$$

d.h. für ein geeignetes G und $\Omega_* \subset \Phi(\Omega)$:

$$G(Dv(y), v(y), y) = 0, \quad y \in \Omega_*.$$

Außerdem $v = h$ auf $\Gamma_* \subset \Phi(\Gamma)$ mit $h(y) = g(\Psi(y))$, d.h. (II.4) ist lokal äquivalent zu

$$\begin{aligned} G(Dv(y), v(y), y) &= 0 \text{ in } \Omega_* \\ v &= h \text{ auf } \Gamma_* \end{aligned}$$

II.2.3. Bestimmung der Anfangsdaten für Ω mit glatten Rand

Definiere $x_0 = X(0)$, $z_0 = z(0) = g(x_0)$, $P_0 = P(0)$. Wie in Section II.1 gilt dann

$$\begin{aligned} \partial_j u(x_0) &= P_{0,j} = (\partial_j g)(x_0), \quad j = 1, .., n-1), \\ F(P_0, z_0, x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit die Kompatibilitätsbedingungen:

$$
\begin{aligned}
X(0) &= x_0, \\
z(0) &= z_0, \\
P_j(0) &= (\partial_j g)(x_0), \quad j = 1, .., n-1 \\
F(P(0), z(0), X(0)) &= 0.
\end{aligned}
\tag{II.6}
$$

Der Punkt $(x_0, z_0, P_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ heißt *zulässig*, falls (II.6) erfüllt ist. Beachte, dass z_0 durch die Wahl von x_0 festgelegt ist. Existenz und Eindeutigkeit von P_0 ist nicht klar.

II.2.4. Nicht charakteristische Randdaten

In diesem Abschnitt wollen wir stets annehmen, dass $(x_0, z_0, P_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ zulässig ist. Wir wollen (II.6) jedoch nicht nur in $x_0 \in \Gamma$, sondern in einer Umgebung von x_0 betrachten. Dies führt auf folgende Erweiterung von (II.6):

$$
\begin{aligned}
X(0) &= y, \\
P(0) &= q(y), \\
z(0) &= g(y), \\
q_j(y) &= (\partial_j g)(y), \quad j = 1, .., n-1, \\
F(q(y), g(y), y) &= 0, \quad y \in U_{x_0},
\end{aligned}
\tag{II.7}
$$

wobei U_{x_0} eine Umgebung von x_0 in Γ ist.

Lemma II.3. *Sei $F_{P_n}(P_0, z_0, x_0) \neq 0$. Dann existiert eine eindeutige Lösung q von* (II.7) *für $y \in \Gamma$ nahe bei x_0. In diesem Fall heißt* (P_0, z_0, x_0) nicht charakteristisch.

Proof:. *Definiere $G : \mathbb{R}^n \times U_{x_0} \to \mathbb{R}^n$*

$$
\begin{aligned}
G_i(P, y) &= P_i - \partial_i g(y), \quad i = 1, .., n-1 \\
G_n(P, y) &= F(P, g(x), y).
\end{aligned}
$$

Dann folgt $G(P_0, x_0) = 0$ und

$$
D_P G(P_0, x_0) = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
\partial_{P_1} F(P_0, z_0, x_0) & \partial_{P_2} F(P_0, z_0, x_0) & \cdots & \partial_{n-1} F(P_0, z_0, x_0) & \partial_{P_n} F(P_0, z_0, x_0)
\end{bmatrix}
$$

Insbesondere gilt also $\det G(P_0, x_0) = \partial_{P_n} F(P_0, z_0, x_0) \neq 0$. Die Existenz von q in einer Umgebung von x_0 in Γ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen mit $G(q(y), y) = 0$ und $q(x_0) = P_0$.

Bemerkung II.4. *Falls Γ nicht flach $x_0 \in \Gamma$ ist, so ist $x_0 \in \Gamma$ nicht charakteristisch falls $D_P F(P_0, z_0, x_0)\nu(x_0) \neq 0$, wobei ν die äußere Normale bezeichnet.*

II.2.5. Lokale Lösungen

OBdA sei Γ in diesem Abschnitt flach. Wir setzen

$$\begin{aligned} P(s) &= P(y,s) = P(y_1,..,y_{n-1},s),\\ z(s) &= z(y,s) = z(y_1,..,y_{n-1},s),\\ X(s) &= x(y,s) = X(y_1,..,y_{n-1},s). \end{aligned}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung von (II.5) mit Anfangsdaten (II.7) (Übungsaufgabe). Wie im Anschnitt II.1 müssen wir X invertieren.

Lemma II.5. *Sei (P_0, z_0, x_0) nicht charakteristisch. Dann existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ um 0 und Umgebungen $W \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von x_0 sowie $V \subset \mathbb{R}^n$ von x_0, sodass für alle $x \in V$ eindeutige $s \in I$ und $y \in W$ existieren mit $x = X(y(x), s(x))$. Die Abbildungen $x \mapsto s$, $x \mapsto y$ sind C^2.*

Proof:. *Es gilt $X(x_0, 0) = x_0$, $X(y, 0) = (y, 0)$. Weiter*

$$(DX)(x_0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{P_1}F(P_0,z_0,x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \partial_{P_{n-1}}F(P_0,z_0,x_0) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{P_n}F(P_0,z_0,x_0), \end{bmatrix}$$

d.h. $\det(DX)(x_0, 0) \neq 0$ *nach Voraussetzung. Die Behauptung folgt nach dem Satz über die Umkehrabbildung.*

Theorem II.6. *Unter den Voraussetzungen von Lemma* (II.5) *setze $u(x) = z(y(x), s(x))$, $p(x) = P(y(x), s(x))$, wobei z, s, P und z wie oben definiert sind. Dann gilt*

$$\begin{aligned} F(Du(x), u(x), x) = 0, &\quad x \in V,\\ u(x) = g(x), &\quad x \in V \cap \Gamma. \end{aligned}$$

Proof:. <u>*Schritt 1:*</u> *Löse* (II.5), (II.6).
Die Existenz einer Lösung $P(s) = P(y, s)$, $z(s) = z(y, s)$, $X(s) = X(y, s)$ von (II.5) *und* (II.6) *folgt unmittelbar aus der Theorie für gewöhnliche DGL.*

<u>*Schritt 2:*</u> *Es gilt $f(y, s) = F(P(y, s), z(y, s), X(y, s)) = 0$ für $y \in W$ und $s \in I$.*
Wegen $P(y, 0) = q(y)$, $z(y, 0) = g(y)$ folgt $f(y, 0) = 0$ für $y \in W$. Weiter folgt mit (II.5) *dann (Übungsaufgabe und)*

$$\begin{aligned} \partial_s f(y,s) =& D_P F(P,z,X)\cdot\partial_s P + D_z F(P,z,X)\partial_s z + D_X F(P,z,X)\cdot\partial_s X\\ =& D_P F(P,z,X)[-D_z F(P,z,X)\cdot P - D_x F(P,z,X)] + D_z F(P,z,X)P\cdot D_P F(P,z,X)\\ &+ D_X F(P,z,X) D_P F(P,z,X) = 0, \quad s \in I. \end{aligned}$$

<u>*Schritt 3:*</u> *Wir zeigen $F(P(x), u(x), x) = 0$, $x \in V$. Mit Schritt 2 folgt direkt:*

$$F(P(x), u(x), x) = F(P(y(x)), s(x)), z(y(x), s(x)), X(y(x), s(x)) = 0.$$

<u>Schritt 4:</u> Wir zeigen $P(x) = Du(x),\ x \in V$. Zunächst zeige

$$\partial_s z(y,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(y,s)\frac{\partial X_j}{\partial s}(y,s) = P(y,s)\cdot \partial_s X(y,s) \tag{II.8}$$

$$\partial_{y_j}(y,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(y,s)\frac{\partial X_j}{\partial y_j}(y,s) = P(y,s)\cdot \partial_{y_j} X(y,s). \tag{II.9}$$

Gleichung (II.8) *folgt direkt aus* (II.5).
Für (II.9) *sei* $y \in \Gamma,\ i \in \{1,\dots,n-1\}$ *und setze*

$$r_i(s) = \partial_{y_i} z(y,s) - P(y,s)\cdot \partial_{y_i} X(y,s).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} r_i(0) &= \partial_i g - q_i(y) \overset{(II.7)}{=} 0 \\ \dot r_i(s) &= \partial_{y_i}\partial_s z(y,s) - \partial_s P(y,s)\cdot \partial_{y_i} X(y,s) - P(y,s)\cdot \partial_{y_i}\partial_s X(y,s). \end{aligned} \tag{II.10}$$

Aus (II.8) *folgt*

$$\partial_{y_i}\partial_s z(y,s) = (\partial_{y_i} P(y,s))\cdot \partial_s X(y,s) + P(y,s)\cdot \partial_s \partial_{y_i} X(y,s).$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot r_i(s) &= (\partial_{y_i} P(y,s))\cdot \partial_s X(y,s) + P(y,s)\partial_s\partial_{y_i} X(y,s) \\ &\quad - \partial_s P(y,s)\cdot \partial_{y_i} X(y,s) - P(y,s)\cdot \partial_{y_i}\partial_s X(y,s) \\ &\overset{(II.5)}{=} (\partial_{y_i} P(y,s))\cdot D_P F(P(y,s),z(y,s),X(y,s)) - [-D_X F(P(y,s),z(y,s),X(y,s)) \\ &\quad - D_z F(P(y,s),z(y,s),X(y,s))\cdot P(y,s)]\cdot \partial_{y_i} X(y,s). \end{aligned}$$

Mit Schritt 2 folgt

$$\begin{aligned} 0 = \partial_{y_i} f(y,s) = {}& D_P F(P(y,s),z(y,s),X(y,s))\cdot \partial_{y_i} P(y,s) \\ &+ D_z F(P(y,s),z(y,s),X(y,s))\cdot \partial_{y_i} z(y,s) \\ &+ D_X F(P(y,s),z(y,s),X(y,s))\cdot \partial_{y_i} X(y,s), \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot r_i(s) &= D_z F(P(y,s),z(y,s),X(y,s))\cdot \left[-\partial_{y_i} z(y,s)) + P(y,s)\partial_{y_i} X(y,s)\right] \\ &= -D_z F(P(y,s),z(y,s),X(y,s))\cdot r_i(s). \end{aligned}$$

Aus der Theorie von ODE folgt, dass $r_i \equiv 0,\ s \in I,\ i = 1,\dots,n-1$ *eine Lösung von* (II.10) *ist, d.h.* (II.9) *gilt. Wir berechnen mit Hilfe von* (II.8) *und* (II.9)*:*

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} u(x) &\overset{Def.}{=} \partial_s z(y(x),s(x))\cdot \partial_{x_j} s(x) + D_y z(y(x),s(x))\cdot \partial_{x_j} y(x) \\ &= P(y,s)\cdot D_s X(y,s)\cdot \partial_{x_j} s(x) + P(y,s)\cdot D_y X(y,s)\cdot \partial_{x_j} y(x) \\ &= P(y,s)\cdot \left[D_s X(y,s)\cdot \partial_{x_j} s(x) + D_y X(y,s)\cdot \partial_{x_j} y(x)\right]. \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen:

$$D_s X(y,s)\partial_{x_j} s(x) + D_y X(y,s) \cdot \partial_{x_j} y(x) = \delta_{ij} \quad \textit{(Kronecker-Delta)}$$

Es gilt wegen $X(y(x), s(x)) = x$:

$$\begin{aligned}\delta_{ik} &= \partial_{x_j} X_k \\ &= D_y X(y(x), s(x)) \cdot \partial_{x_j} y(x) + D_s X(y(x), s(x)) \cdot \partial_{x_j} s(x).\end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\partial_{x_j} u(x) = P_j(y,s)$ und somit $Du = p$.

Example II.7. *Wir betrachten eine lineare, homogene PDE, d.h.*

$$F(Du(x), u(x), x) = b(x) \cdot (Du)(x) + c(x) \cdot u(x)\,,\ \ x \in \Omega \tag{II.11}$$

Dann folgt mit

$$\begin{aligned}D_P F(P,z,x) &= b(x) \\ D_z F(P,z,x) &= c(x) \\ D_X F(P,z,x) &= 0.\end{aligned}$$

und (II.5) *(vgl. Übungen)*

$$\begin{aligned}\dot{P}(s) &= -c(X(s)) \cdot P(s) \\ \dot{z}(s) &= P(s) \cdot b(X(s)) = -c(X(s)) \cdot z(s) \\ \dot{X}(s) &= b(X(s)).\end{aligned}$$

Annahme: *Sei $c \equiv 0$ und $\dot{X}(s) = b(X(s))$ besitzt folgende Trajektorien:*

$INSERT\ PICTURE$

Somit ist $z \equiv const$ entlang jeder Trajektorie; aber beachte Kompatibilitätsbedingung an g, da die Funktionswerte am Rand vorgeschrieben sind.

Annahme: *Sei $c \equiv 0$ und $\dot{X}(s) = b(X(s))$ besitzt folgende Trajektorien:*

$INSERT\ PICTURE$

Lösung ist nur glatt, falls g konstant ist.

Bemerkung II.8. *Insbesondere folgt aus obigem Beispiel, dass i.A. keine glatte Lösung existiert.*

II.2.6. Schwache Formulierung

Wir betrachten die PDE

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) &= g \quad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned} \tag{II.12}$$

Multiplikation mit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}_+})$ liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x F(u)) \cdot \varphi \\ &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi + \int_{\mathbb{R}} g \cdot \varphi(\cdot, 0) \end{aligned} \tag{II.13}$$

φ heißt *Testfunktion*.

Definition II.9. Wir sagen, dass $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ eine *Integrallösung* von (II.12) ist, falls (II.13) für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}_+})$ gilt.

Wir betrachten folgende Situation:

INSERT PICTURE

Hierbei bezeichnet ν die äußere Normale, u sei glatt in V_l und V_r. C heißt *Unstetigkeitskurve*, falls u in C nicht stetig ist (wovon wir im Folgenden ausgehen). Somit ergibt sich

$$0 = \int_{V_l} u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi = -\int_{V_l} (\partial_t u + \partial_x F(u))\, \varphi, \qquad \varphi \in C_c^\infty(V_l).$$

Es folgt (für V_r analog):

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 \quad \text{in } V_l \\ \partial_t u + \partial_x F(u) &= 0 \quad \text{in } V_r. \end{aligned} \tag{II.14}$$

Weiter gilt für $\varphi \in C_c^\infty(V)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V u \cdot \partial_t \varphi + F(u) \cdot \partial_x \varphi \\ &= -\int_{V_l \cup V_r} (\partial_t u + \partial_x F(u))\, \varphi + \int_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_l \\ F(u_l) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi - \int_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_r \\ F(u_r) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi \\ &\overset{\text{(II.14)}}{=} \int_{C \cap V} \begin{pmatrix} u_l - u_r \\ F(u_l) - F(u_r) \end{pmatrix} \nu \cdot \varphi, \end{aligned}$$

wobei u_l der Grenzwert von links in $C \cap V$ und u_r der Grenzwert von rechts ist.

Sei nun C gegeben durch $\{(x,t) : x = s(t)\}$ für $s : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ glatt. Dann gilt

$$F(u_l) - F(u_r) = \dot{s} \cdot (u_l - u_r),$$

wobei

$$\nu \overset{(\text{ÜA})}{=} \frac{1}{1+(\dot{s})^2}\begin{pmatrix}-\dot{s}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Mit der Notation

$$\begin{aligned}
[[u]] &= u_l - u_r && \text{(Sprung in } u \text{ entlang } C\text{)}\\
[[F(u)]] &= F(u_l) - F(u_r) && \text{(Sprung in } F(u) \text{ entlang } C\text{)}\\
\sigma &= \dot{s} && \text{(„Geschwindigkeit“ von } C\text{)}
\end{aligned}$$

lässt sich dies über

$$[[F(u)]] = \sigma \cdot [[u]] \tag{II.15}$$

entlang der Unstetigkeitskurve C ausdrücken. Gleichung (II.15) heißt *Rankine-Hugoniot-Bedingung*.

Beispiel II.10 (*Burgersgleichung*)**.** *Setze*

$$F(u) := \frac{u^2}{2}, \quad g(x) = \begin{matrix} 1x \le 0, \\ 1 - x0 < x \le 1, \\ 0x > 1. \end{matrix}$$

und betrachte

$$\begin{aligned}
\partial_t u + \partial_x\left(\tfrac{u^2}{2}\right) &= 0 \ \mathit{in}\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\\
u &= g \ \mathit{auf}\ \mathbb{R}\times\{t=0\}
\end{aligned} \tag{II.16}$$

Die (projizierten) Charakteristiken haben die Form [ÜA] $Y(s) = (g(x_0)s + x_0, s)$, also ist die Lösung über

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \le t, 0 \le t < 1,\\ \frac{1-x}{1-t} & t \le x \le 1, 0 \le t < 1,\\ 0 & x \ge 1, 0 \le t < 1.\end{cases}$$

gegeben.

Für $t > 1$ kreuzen sich die Charakteristiken. Setzte $s(t) = \frac{1+t}{2}$ und

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x < s(t), t \geq 1, \\ 0 & x > s(t), t \geq 1. \end{cases}$$

Dann gilt entlang s:

$$F(u_l) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2},\ F(u_r) = \frac{0^2}{2} = 0,\ u_l = 1,\ u_r = 0,$$

d.h. $[[u]] = 1$, $[[F(u)]] = \frac{1}{2}$. Die Rankine-Hugonoit-Bedingung liefert also $\sigma = \frac{1}{2} = \dot{s}$.

Wir betrachten nun II.10 mit $g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$

Dann ist sowohl

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & x < t/2, \\ 1 & x > t/2 \end{cases} \text{ als auch } u_2(x,t) = \begin{cases} 1 & x > t, \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

eine Integrallösung von II.10 ([ÜA] Überprüfe Rankine-Hugoniot-Bedingung).

Problem: Eindeutigkeit.

Im Folgenden nehmen wir an, dass wir von einem Punkt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ausgehend entlang einer (projizierten) Charakteristik **rückwärts** keine andere Charakteristik treffen.

Sei nun C wieder eine Unstetigkeitskurve und $P \in C$, so dass P von den Charakteristiken Y_1 und Y_2 getroffen wird.

Dann gilt wegen $Y_i(s) = (F'(g(x_i))s + x_i, s),\ i = 1, 2,\ x_1 < x_2$ für die Charakteristiken, dass

$$\begin{aligned} &F'(u_l)s + x_1 = F'(u_r)s + x_2 \Rightarrow (F'(u_l) - F'(u_r))s = x_2 - x_1 > 0 \\ &\overset{[\ddot{U}A]}{\Rightarrow} F'(u_l) > \sigma > F'(u_r). \end{aligned} \tag{II.17}$$

Diese Ungleichung nennt man auch *Entropie-Bedingung*. Eine Unstetigkeitskurve nennt man *Schock* falls (II.17) und die Rankine-Hugonoit-Bedingung erfüllt sind.

Sei nun F gleichmäßig konvex, d.h. $F'' \geq \Theta > 0$ für ein $\Theta > 0$. Dann folgt wegen F' streng monoton wachsend, dass (II.17) zu $u_l > u_r$ äquivalent ist. Insbesondere ist F' injektiv und surjektiv. Wir definieren

$$G := (F')^{-1}.$$

Dann ist eine Integrallösung von II.10 für $g(x) = \begin{cases} u_l & x < 0, \\ u_r & x > 0 \end{cases}$ und $x \in \mathbb{R},\ t > 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \begin{cases} u_l & \frac{x}{t} < \sigma \\ u_r & \frac{x}{t} > \sigma \end{cases} \text{mit } \sigma = \frac{F(u_l)-F(u_r)}{u_l-u_r} \qquad \text{falls } u_l > u_r \\ \text{bzw. } u(x,t) &= \begin{cases} u_l & \frac{x}{t} < F'(u_l) \\ G(\frac{x}{t}) & F'(u_l) < \frac{x}{t} < F'(u_r) \\ u_r & \frac{x}{t} > F'(u_r) \end{cases} \qquad \text{falls } u_l < u_r \end{aligned}$$

(ohne Beweis).

Bemerkung II.11.

(a) *Im ersten Fall sind u_l und u_r durch einen Schock getrennt, im zweiten Fall durch eine Rarefaction Wave.*

(b) *Man kann zeigen, dass für F konvex und glatt höchstens eine Integrallösung existiert, welche zusätzlich*

$$u(x+z,t) - u(x,t) \le c(1+\frac{1}{t})z,\ x \in \mathbb{R},\ z,t > 0$$

für ein $c > 0$ genügt. Insbesondere sind diese Lösungen eindeutig.

(c) *Die Existenz einer Integrallösung lässt sich mit Variationsrechnung zeigen, vgl. Lax-Oleinik-Formel.*

II.2.7. Inhomogenes Problem

Wir betrachten in diesem Abschnitt:

$$\begin{aligned} \partial_t u + b \cdot D_x u &= f && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{aligned} \tag{II.18}$$

Wie in Abschnitt 1 setzen wir

$$z(s) = u(X(s)),\ P(s) = \begin{pmatrix} D_x u \\ \partial_t u \end{pmatrix}(X(s)),\ \dot{X}(s) = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt mit $\partial_{n+1} = \partial_t$, dass

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= P(s)\dot{X}'(s), \\ (\dot{P}^i)(s) &= \begin{pmatrix} D_x \partial_i u \\ \partial_t \partial_i u \end{pmatrix}(X(s)) \cdot X'(s),\ i = 1,\ldots,n+1 \\ \dot{z}(s) &= P(s) \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = f(X(s)). \end{aligned}$$

Integration der letzten Gleichung ergibt

$$z(t) - z(0) = \int_0^t f(X(s))ds = \int_0^t f(x_0 + bs, s)ds,$$

d.h $u(x_0 + bt, t) = \int_0^t f(x_0 + bs, s)ds$. Mit $x := x_0 + bt$ folgt dann

$$u(x,t) = \int_0^t f(x + b(s-t), s)ds. \tag{II.19}$$

II.3. Die Wellengleichung

II.3.1. Der Fall $n = 1$

Wir betrachten zunächst

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \\ \partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{aligned} \tag{II.20}$$

Wegen $(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = \partial_t^2 u - \partial_x^2 u$ lässt sich II.20 in

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \partial_x u &= v && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\
\partial_t v + \partial_x v &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\
u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\
v &= h - \partial_x g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}
\end{aligned}$$

umschreiben. Mit Abschnitt 1 folgt nun ($b = 1$)

$$v(x, s) = h(x - s) - (\partial_x g)(x - s) =: a(x - s).$$

Mit Abschnitt 2.7 folgt analog ($b = -1,\ f(x, s) = v(x, s)$)

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_0^t v(x - (s - t), s) ds + g(x + t) \\
&= \int_0^t a(x + t - 2s) ds + g(x + t) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + g(x + t) \\
&= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (\partial_x g)(y) dy + g(x + t) \\
&= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy + \frac{1}{2} g(x + t) + \frac{1}{2} g(x - t)
\end{aligned} \tag{II.21}$$

Dies ist *d'Alemberts Formel*. In $(*)$ wurde die Substitution $y = x + t - 2s$, $dy = -2ds$ verwendet.

Theorem II.12. *Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ dann ist $u \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ definiert durch II.21 eine Lösung von II.20.*

Proof:. *Nachrechnen.*

Im nächsten Schritt betrachten wir

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\
u &= g && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\
\partial_t u &= h && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\
u &= 0 && \text{auf } \{x = 0\} \times \mathbb{R}_+
\end{aligned} \tag{II.22}$$

mit $g(0) = h(0) = 0$.
<u>Idee:</u> Erweitere u, g, h auf $\mathbb{R}$, d.h.

$$\tilde{g} = \begin{cases} g(x) & , x \geq 0 \\ -g(-x) & , x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{h} = \begin{cases} h(x) & , x \geq 0 \\ -h(-x) & , x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{u} = \begin{cases} u(x) & , x \geq 0 \\ -u(-x) & , x < 0 \end{cases}.$$

Falls u Gleichung (II.22) löst, so löst $\tilde{u}$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tilde{u} - \partial_x \tilde{u} &= 0 \quad && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \tilde{u} &= \tilde{g} \quad && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ \partial_t \tilde{u} &= \tilde{h} \quad && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Nach (II.19) ist $\tilde{u}$ über

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy$$

gegeben. Insbesondere folgt $\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(t) + \tilde{g}(-t)) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \tilde{h}(y)dy = 0$ für $t \geq 0$ und

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy & , x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t} h(y)dy & , 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Beachte: $u \notin C^2$ falls $g''(0) \neq 0$

II.3.2. Der Fall $n = 3$

Wir setzen

$$\begin{aligned} U(x,r,t) &:= \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t) = \frac{1}{\partial B(x,r)} \int_{\partial B(x,r)} u(y,t) \quad \text{(Mittelwert über } \partial B(x,r)), \\ G(x,r,t) &= \fint_{\partial B(x,r)} g(y,t), \quad H(x,r,t) = \fint_{\partial B(x,r)} h(y,t). \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x u &= 0 \quad && \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g \quad && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= h \quad && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.23}$$

für $g \in C^2(\mathbb{R}^n), h \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Lemma II.13. *(*(Euler-Poisson-Darboux-Gleichung)
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ eine Lösung von (II.23). *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U - \partial_r^2 U - \frac{n-1}{r}\partial_r U &= 0 \quad && \textit{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ U &= G \quad && \textit{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \partial_t U &= H \quad && \textit{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{II.24}$$

Proof:. *Mit*

$$U(x,r,t) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS(y) \overset{\text{ÜA}}{=} \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz,t)dS(z)$$

folgt

$$\begin{aligned}
\partial_r U(x,r,t) &= \fint_{\partial B(0,1)} z(\nabla u)(x+rz,t)dS(z) = \fint_{\partial B(x,r)} \frac{y-x}{r}(\nabla u)(y,t)dS(y) \\
&= \fint_{\partial B(x,r)} \nu(\nabla u)(y,t)dS(y) \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{B(x,r)} div(\nabla u)(y,t)dS(y) \\
&= \frac{|B(x,r)|}{|\partial B(x,r)|}\fint_{B(x,r)} (\Delta u)(y,t)dS(y) \overset{\text{ÜA}}{=} \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} (\Delta u)(y,t)dS(y).
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\partial_r^2 U(x,r,t) = \fint_{\partial B(x,r)} \Delta u(y,t)dS(y) + (\frac{1}{n}-1)\fint_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dS(y). \tag{II.25}$$

Damit folgt $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ *und*

$$\begin{aligned}
\lim_{r\searrow 0} \partial_r U(x,r,t) &= 0, \\
\lim_{r\searrow 0} \partial_r^2 U(x,r,t) &= \frac{1}{n}\Delta u(x,t).
\end{aligned} \tag{II.26}$$

Aus (II.23) *ergibt sich dann*

$$\partial_r U(x,r,t) = \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \partial_t^2 u(y,t)dy = \frac{1}{n\alpha(n)}\frac{1}{r^{n-1}}\int_{B(x,r)} \partial_t^2 u(y,t)dy,$$

wobei $\alpha(n)$ *das Maß der Einheitskugel bezeichnet. Insbesondere erhalten wir*

$$r^{n-1}\partial_r U(x,r,t) = \frac{1}{n\alpha(n)}\int_{B(x,r)} \partial_t^2 u(y,t)dy. \tag{II.27}$$

Mit den Gleichungen (II.27) *und* (II.25) *folgt dann*

$$\begin{aligned}\partial_r(r^{n-1}\partial_r U(x,r,t)) =& (n-1)r^{n-2}\partial_r U(x,r,t) + r^{n-1}\partial_r^2 U(x,r,t)\\ =& \frac{n-1}{n\alpha(n)}\frac{1}{r}\int_{B(x,r)} \partial_t^2 u(y,t)dS(y) + r^{n-1} \fint_{\partial B(x,r)} (\Delta u)(y,t)dS(y)\\ &+ r^{n-1}\frac{1-n}{n}\fint_{B(x,r)}(\Delta u)(y,t)dS(y)\\ =& r^{n-1}\fint_{\partial B(x,r)} \partial_t^2 u(y,t)dS(y) = r^{n-1}\partial_t^2 U,\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt $|B(x,r)| = r^n\alpha(n)$ *verwendet haben. Insgesamt folgt*

$$(n-1)r^{n-2}\partial_r U(x,r,t) + r^{n-1}\partial_r^2 U(x,r,t) = r^{n-1}\partial_t^2 U$$

Teilt man beide Seiten der Gleichung durch r^{n-1}*, so folgt die Behauptung.*

Sei nun $n = 3$. Wir setzen $\tilde{U} = rU$, $\tilde{G} = rG$ und $\tilde{H} = rH$. Dann folgt mit (II.24)

$$\begin{aligned}\partial_t^2\tilde{U} = r\partial_t^2 U = r(\partial_r^2 U + \frac{2}{r}\partial_r U) &= r\partial_r^2 U + 2\partial_r U) = \partial_r(U + r\partial_r U)\\ &= \partial_r\partial_r\tilde{U} = \partial_r^2\tilde{U}\end{aligned}$$

und und mit (II.26)

$$\partial_r^2\tilde{G}(0) = 0\cdot\partial_r^2 G(0) + 2\partial_r G(0) = 0,$$

d.h. $\tilde{U}$ löst

$$\begin{aligned}\partial_t^2\tilde{U} - \partial_r\tilde{U} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\\ \tilde{U} &= \tilde{G} && \text{auf } \mathbb{R}_+\times\{t=0\}\\ \partial_t\tilde{U} &= \tilde{H} && \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\}\\ \tilde{U} &= 0 && \text{auf } \{r=0\}\times\mathbb{R}_+\end{aligned} \tag{II.28}$$

Mit Abschnitt II.3.1 folgt

$$\tilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t}\tilde{H}(y)dy$$

und

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r\searrow 0} U(x,r,t) = \lim_{r\searrow 0} \frac{\tilde{U}(x,r,t)}{r} = \lim_{r\searrow 0} \left(\frac{1}{2r}(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2r}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy\right. \\ &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) = \frac{\partial}{\partial t}(tG(t)) + tH(t) = \frac{\partial}{\partial t}(t \fint_{\partial B(x,t)} g\,ds) + t \fint_{\partial B(x,t)} h\,ds. \end{aligned} \tag{II.29}$$

Wie oben folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \fint_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y) &= \frac{\partial}{\partial t} \fint_{\partial B(0,1)} g(x+tz)\,dS(z) = \int_{\partial B(0,1)} z(\nabla g)(x+tz)\,dS(z) \\ &= \int_{\partial B(x,t)} \frac{y-x}{t}(\nabla g)(y)\,dS(z) \end{aligned}$$

Mit (II.29) löst u, definiert über

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} th(y) + g(y) + (y-x)(\nabla g)(y)\,dS(y)$$

löst (II.23) Diese Formel heisst *Kirchhoff's Formel*

Theorem II.14. *Sei $n = 3$, $g \in C^2(\mathbb{R}^3), h \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist die Lösung von* (II.23) *über*

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} th(y) + g(y) + (y-x)(\nabla g)(y)\,dS(y) \tag{II.30}$$

gegeben.

Bemerkung II.15. *Obiger Ansatz kann auf beliebige,* ungerade Dimension übertragen werden.

II.3.3. Der Fall $n = 2$

Leider ist keine Transformaion bekannt, welche die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung in eine eindimensionale Wellengleichung überführt. Wir setzen $\overline{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t)$. Dann folgt nach Definition, dass $\overline{u}$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \overline{u} - \partial_x \overline{u} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ \overline{u} &= \overline{g} && \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \\ \partial_t \overline{u} &= \overline{h} && \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit $\overline{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$ und $\overline{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)$ löst. Setzen wir $\overline{x} = (x_1, x_2, 0)$, so ist $\overline{u}$ nach Formel II.29 über

$$\overline{u}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \fint_{\partial \overline{B}(\overline{x}, t)} \overline{g} \, d\overline{S}\right) + t \int_{\partial \overline{B}(\overline{x}, t)} \overline{h} \, d\overline{S}$$

gegeben.

Index