Partielle Differentialgleichungen I

Matthias Geissert

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Wir betrachten einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung und wollen die Wärmeleitung untersuchen. Dazu treffen wir folgende Annahmen:

- Der Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall $[0,1]$ und $u(x,t)$ ist die Temperatur an der Stelle x zum Zeitpunkt t.
- Konstanten: ρ Dichte, c spezifische Wärme
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Wärmequelle
- Energie in Segment $[x_1, x_2] : E(x_1, x_2, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(x_1, t)$
- Sei $Q(x,t)$ die thermische Energie durch den Punkt x zum Zeitpunkt t und K_0 die thermale Konduktivität. Dann gilt
$$\frac{Q(x,t_2) - Q(x,t_1)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(x,t_1).$$
- Energieerhaltung:
$$c\rho(x_2 - x_1)(u(x_1,t_2) - u(x_1,t_1)) =$$
$$(t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u(x_1,t_1) - u(x_2,t_1)\right)\right).$$

Daraus folgt

$$\frac{u(x_1,t_2) - u(x_1,t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u(x_1,t_1) - u(x_2,t_1)}{x_1 - x_2}\right)$$

und somit

$$\partial_t u(x_1,t_1) = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_1,t_1), \tag{1.1}$$

wobei $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ die Konstante der thermischen Diffusivität ist. Gleichung (1.1) heißt Wärmeleitungsgleichung. Bei stationärer Temperaturverteilung gilt $0 = \partial_t u(x,t)$ und damit

$$0 = f(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t).$$

Partielle Differentialgleichungen tauchen also in natürlicher Weise in Anwendungen auf. Im Rahmen dieser Vorlesung sind partielle Differentialgleichungen immer ohne Herleitung gegeben.

2 Einführung

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets ein Gebiet.

Definition 2.0.1.

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), ..., Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in \Omega \tag{2.1}$$

heißt partielle Differentialgleichung (PDE) k-ter Ordnung.
Hier ist $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht.

Wir untersuchen folgende Typen von PDE's.

Definition 2.0.2. PDE (2.1) heißt

(a) *linear*, falls
$$F(D^k u(x), \ldots, x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u - f(x),$$

(b) *semi-linear*, falls
$$F(D^k u(x), \ldots, x) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \ldots, x)$$
für $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ und $a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben,

(c) *quasi-linear*, falls
$$F(D^k u(x), \ldots, x) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(D^{k-1}u, \ldots, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \ldots, x)$$
für $a_\alpha, a_0 : \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben und

(d) *voll nicht-linear*, falls in der Situation von (c) a_α auch von $D^k u$ abhängt.

Später werden wir sehen, dass sich der semi- und der quasi-lineare Fall mit Hilfe eines Fixpunktarguments auf den linearen Fall reduzieren lassen, wobei der quasi-lineare Fall technisch schwieriger ist. Später werden wir auch weitere Typen linearer PDE's diskutieren.

Definition 2.0.3.

$$\mathbb{F}(D^k u(x), \ldots, x) = 0, \quad x \in \Omega \tag{2.2}$$

heißt System von PDE's k-ter Ordnung. Hier ist $\mathbb{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \cdots \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ gesucht.

Beispiel 2.0.4.

(a) *Laplace Gleichung:*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u = 0$$

(b) *Transportgleichung:*

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i u = 0$$

(c) *Wärmeleitungsgleichung:*

$$u_t - \Delta u = 0$$

(d) *Wellengleichung:*

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

(e) *Sei* $\Omega \infty \mathbb{R}^n$. *Navier-Stokes-Gleichung:*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= f \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \end{aligned}$$

Hier ist $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *das gesuchte* Geschwindigkeitsfeld *und* $p : \Omega \to \mathbb{R}$ *der gesuchte* (Druck). *Das Anfangsgeschwindigkeitsfeld* $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *ist gegeben.*

Damit die PDE's eindeutig lösbar sind, müssen noch entsprechende Randbedingungen gefordert werden.

Typische Fragestellungen, die im Rahmen dieser Vorlesung untersucht werden sind:

(a) Existenz

(b) Eindeutigkeit

(c) Regularität

(d) Abbildungsverhalten der Gleichung (Beispielsweise besitzt $u - \Delta u = f$ genau dann eine eindeutige Lösung $u \in X$, wenn $f \in Y$, d.h. $(1 - \Delta) : X \to Y$ ist ein Isomorphismus.)

(e) Weitere Eigenschaften der Lösung

In den folgenden Kapiteln diskutieren wir unterschiedliche Zugänge zur Beantwortung dieser Fragen. Leider lässt sich in nur wenigen Fällen die Lösung einer PDE explizit berechnen. Daher werden im Rahmen dieser Vorlesung sowohl "explizite" als auch abstrakte Methoden (welche zumindest erlauben, einige Aussagen über die Lösung zu treffen) vorgestellt.

3 Die Methode der Charakteristiken

3.1 Motivation anhand der Transportgleichung

Für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$\partial_t u + bDu = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \tag{3.1}$$

$$u = g, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \tag{3.2}$$

Idee: Finde Weg $X_{x_0} : I \to \mathbb{R}_+^{n+1}$ entlang dem sich u durch Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE) berechnen lässt. Um die Notation zu erleichten setze im Folgenden $X_{x_0}(s) = X(s)$ und $\partial_{n+1} = \partial_t$. Weiter sei

$$z(s) = u(X(s)), \quad p(s) = \begin{pmatrix} D_x u \\ \partial_t u \end{pmatrix} (X(s)), \quad z(0) = g(x_0).$$

Dann folgt mit der Kettenregel

$$z'(s) = \begin{pmatrix} D_x u \\ \partial_t u \end{pmatrix} (X(s)) \cdot X'(s) = p(s) \cdot X'(s). \tag{3.3}$$

Die Ableitung von $p(s)$ ergibt komponentenweise erneut mit der Kettenregel

$$(p^i)'(s) = \begin{pmatrix} D_x \partial_i u \\ \partial_t \partial_i u \end{pmatrix} (X(s)) \cdot X'(s), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Aus (3.1) folgt $\partial_i \partial_t u + bD\partial_i u = 0$ oder als Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} \partial_t \partial_i u \\ D_x \partial_i u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Setze $X'(s) = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h.

$$X(s) = \begin{pmatrix} x_0 + sb \\ s \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $(p^i)'(s) = 0$. Mit

$$p(0) = \begin{pmatrix} D_x u \\ \partial_i u \end{pmatrix} (x_0, 0)$$

folgt $p(s) = \begin{pmatrix} D_x u \\ \partial_i u \end{pmatrix} (x_0, 0)$. Gleichung (3.3) impliziert nun

$$\begin{aligned} z'(s) &= p(s) \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = b(Du)(x_0,0) + (\partial_t u)(x_0,0) \overset{(3.1)}{=} 0 \\ z(0) &= g(x_0) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$u(x_0, 0) \overset{(3.2)}{=} g(x_0) = z(s) = u(X(s)) = u(\underbrace{x_0 + bs}_{:=x}, s),$$

d.h. $u(x,s) = u(x - bs, 0) = g(x - bs)$. Insgesamt erhalten wir

Theorem 3.1.1. *Sei $k \in \mathbb{N}$, $g \in C^k(R^n)$. Dann löst*

$$u(x,s) = g(x - bs) \in C^k(\mathbb{R}^n \times (o, \infty))$$

die Transportgleichung (3.1).

Bemerkung 3.1.2. *u ist nicht glatter als g.*

3.2 Allgemeiner Fall

Betrachte nun beliebige PDE 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} F(Du(x), u(x), x) = 0 \text{ in } \Omega \\ u = g \text{ auf } \Gamma \end{aligned} \tag{3.4}$$

Hierbei ist $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega$ gegeben und glatt.

3.2.1 Herleitung einer ODE für z(s), p(s), X(s)

Wir definieren:

$$\begin{aligned} z(s) &= u(x(s)) \\ p(s) &= (Du)(X(s)) \end{aligned}$$

und berechnen:

$$\begin{aligned} z'(s) &= (Du)(X(s)) \cdot X'(s) = p(s) * X'(s) \\ (p^i)'(s) &= (D\partial_i u)(X(s)) \cdot X'(s), \quad i = 1, .., n \end{aligned}$$

Ziel: Elimiere Ableitungen 2. Ordnung. Aus (3.4) folgt

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_{p_j} F(p(s), z(s), X(s)) \partial_i \partial_j u + \partial_z F(p(s), z(s), X(s)) \partial_i u \\ + \partial_i F(p(s), z(s), X(s)) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Also setze

$$(x^j)'(s) = \partial_{p_j} F(p(s), z(s), X(s)), \quad j = 1, .., n$$

Dann gilt

$$(p^i)'(s) = -\partial_{p_i} F(p(s), z(s), X(s))p^i(s) - \partial_i F(p(s), z(s), X(s)), \quad i = 1, .., n$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} p'(s) &= -D_z F(p(s), z(s), X(s)) \cdot p(s) - D_x F(p(s), z(s), X(s)) \\ z'(s) &= p(s)(D_p F)(p(s), z(s), X(s)) \\ X'(s) &= (D_p F)(p(s), z(s), X(s)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Insbesondere erfüllt jede Lösung $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$ von (3.4) das System (3.5) solange $x(s) \in \Omega$.

3.2.2 OBdA Rand von Ω 'lokal flach'

Rand von Ω flach bedeutet $\Gamma \cong \mathbb{R}^n_+$. In einer Umgebung $U \subset \Gamma$ von $x_0 \in \Gamma$ lässt sich Γ durch Schieben und Drehen in den Graph einer glatten 'kleinen' Funktion $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ überführt. Setze nun

$$\begin{aligned} v(y) &= u(y_1, .., y_{n-1}, y_n + \phi(y_1, ..., y_{n-1})), \\ u(x) &= v(x_1, .., x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, ..., x_{n-1})), \\ \Phi(x) &= (x_1, .., x_{n-1}, x_n - \phi(x_1, ..., x_{n-1})), \\ \Psi(x) &= (x_1, .., x_{n-1}, x_n + \phi(x_1, ..., x_{n-1})). \end{aligned}$$

Dann gilt wegen $(Du)(x) = (Dv)(y)(D\Phi)(x)$ die Gleichung

$$0 = F((Du)(x), u(x), x) = F((Dv)(y)(D\Phi)(x), v(y), \Psi(y)), \quad y = \Phi(x),$$

d.h. für ein geeignetes G und $\Omega_* \subset \Phi(\Omega)$:

$$G(Dv(y), v(y), y) = 0, \quad y \in \Omega_*.$$

Außerdem $v = h$ auf $\Gamma_* \subset \Phi(\Gamma)$ mit $h(y) = g(\Psi(y))$, d.h. (3.4) ist lokal äquivalent zu

$$\begin{aligned} G(Dv(y), v(y), y) &= 0 \text{ in } \Omega_* \\ v &= h \text{ auf } \Gamma_* \end{aligned}$$

3.2.3 Bestimmung der Anfangsdaten für (3.5) mit glatten Rand

Definiere $x_0 = X(0)$, $z_0 = z(0) = g(x_0)$, $p_0 = p(0)$. Wie in Section 3.1 gilt dann

$$\begin{aligned} \partial_j u(x_0) &= p_{0,j} = (\partial_j g)(x_0), \quad j = 1, .., n-1), \\ F(p_0, z_0, x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit die Kompatibilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, \\ z(0) &= z_0, \\ p_j(0) &= (\partial_j g)(x_0), \quad j = 1,..,n-1 \\ F(p(0), z(0), X(0)) &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Der Punkt $(x_0, z_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ heißt *zulässig*, falls (3.6) erfüllt ist. Beachte, dass z_0 durch die Wahl von x_0 festgelegt ist. Existenz und Eindeutigkeit von p_0 ist nicht klar.

3.2.4 Nicht charakteristische Randdaten

In diesem Abschnitt wollen wir stets annehmen, dass $(x_0, z_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ zulässig ist. Wir wollen (3.6) jedoch nicht nur in $x_0 \in \Gamma$, sondern in einer Umgebung von x_0 betrachten. Dies führt auf folgende Erweiterung von (3.6):

$$\begin{aligned} X(0) &= y, \\ p(0) &= q(y), \\ z(0) &= g(y), \\ q_j(y) &= (\partial_j g)(y), \quad j = 1,..,n-1, \\ F(q(y), g(y), y) &= 0, \quad y \in U_{x_0}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei U_{x_0} eine Umgebung von x_0 in Γ ist.

Lemma 3.2.1. *Sei $F_{p_n}(p_0, z_0, x_0) \neq 0$. Dann existiert eine eindeutige Lösung q von (3.7) für $y \in \Gamma$ nahe bei x_0. In diesem Fall heißt (p_0, z_0, x_0)* nicht charakteristisch*.*

Proof:. *Definiere $G : \mathbb{R}^n \times U_{x_0} \to \mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} G_i(p, y) &= p_i - \partial_i g(y), \quad i = 1,..,n-1 \\ G_n(p, y) &= F(p, g(x), y). \end{aligned}$$

Dann folgt $G(p_0, x_0) = 0$ und

$$D_p G(p_0, x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \partial_{p_1} F(p_0, z_0, x_0) & \partial_{p_2} F(p_0, z_0, x_0) & \cdots & \partial_{n-1} F(p_0, z_0, x_0) & \partial_{p_n} F(p_0, z_0, x_0) \end{bmatrix}$$

Insbesondere gilt also $\det G(p_0, x_0) = \partial_{p_n} F(p_0, z_0, x_0) \neq 0$. Die Existenz von q in einer Umgebung von x_0 in Γ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen mit $G(q(y), y) = 0$ und $q(x_0) = p_0$.

Bemerkung 3.2.2. *Falls Γ nicht flach $x_0 \in \Gamma$ ist, so ist $x_0 \in \Gamma$ nicht charakteristisch falls $D_p F(p_0, z_0, x_0)\nu(x_0) \neq 0$, wobei ν die äußere Normale bezeichnet.*

3.2.5 Lokale Lösungen

OBdA sei Γ in diesem Abschnitt flach. Wir setzen

$$\begin{aligned} p(s) &= p(y,s) = p(y_1,..,y_{n-1},s),\\ z(s) &= z(y,s) = z(y_1,..,y_{n-1},s),\\ X(s) &= x(y,s) = X(y_1,..,y_{n-1},s). \end{aligned}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung von (3.5) mit Anfangsdaten (3.7) (Übungsaufgabe). Wie im Anschnitt 3.1 müssen wir X invertieren.

Lemma 3.2.3. *Sei (p_0, z_0, x_0) nicht charakteristisch. Dann existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ um 0 und Umgebungen $W \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von x_0 sowie $V \subset \mathbb{R}^n$ von x_0, sodass für alle $x \in V$ eindeutige $s \in I$ und $y \in W$ existieren mit $x = X(y(x), s(x))$. Die Abbildungen $x \mapsto s$, $x \mapsto y$ sind C^2.*

Proof:. *Es gilt $X(x_0, 0) = x_0$, $X(y, 0) = (y, 0)$. Weiter*

$$(DX)(x_0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{p_1}F(p_0,z_0,x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \partial_{p_{n-1}}F(p_0,z_0,x_0) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \partial_{p_n}F(p_0,z_0,x_0), \end{bmatrix}$$

d.h. $\det(DX)(x_0, 0) \neq 0$ *nach Voraussetzung. Die Behauptung folgt nach dem Satz über die Umkehrabbildung.*

Theorem 3.2.4. *Unter den Voraussetzungen von Lemma* (3.2.3) *setze $u(x) = z(y(x), s(x))$, $p(x) = p(y(x), s(x))$, wobei z, s, p und z wie oben definiert sind. Dann gilt*

$$\begin{aligned} F(Du(x), u(x), x) = 0, \quad & x \in V,\\ u(x) = g(x), \quad & x \in V \cap \Gamma. \end{aligned}$$

Proof:. *<u>Schritt 1:</u> Löse* (3.5), (3.6).
Die Existenz einer Lösung $p(s) = p(y, s)$, $z(s) = z(y, s)$, $X(s) = X(y, s)$ von (3.5) *und* (3.6) *folgt unmittelbar aus der Theorie für gewöhnliche DGL.*

<u>Schritt 2:</u> Es gilt $f(y, s) = F(p(y, s), z(y, s), X(y, s)) = 0$ für $y \in W$ und $s \in I$.
Wegen $p(y, 0) = q(y)$, $z(y, 0) = g(y)$ folgt $f(y, 0) = 0$ für $y \in W$. Weiter folgt mit (3.5) *dann (Übungsaufgabe und)*

$$\begin{aligned} \partial_s f(y,s) =& D_pF(p,z,X) \cdot \partial_s p + D_zF(p,z,X)\partial_s z + D_XF(p,z,X) \cdot \partial_s X \\ =& D_pF(p,z,X)[-D_zF(p,z,X) \cdot p - D_xF(p,z,X)] + D_zF(p,z,X)p \cdot D_pF(p,z,X) \\ &+ D_XF(p,z,X)D_pF(p,z,X) = 0, \quad s \in I. \end{aligned}$$

Index