Lineare Algebra 2
13. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
13./14. Juli 2010

Wir wollen uns in diesem Tutorium mit dem Lösen einfacher Differentialgleichungen befassen. Wir schränken uns dabei auf sog. lineare, homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ein.

Aufgabe 1 Der eindimensionalen Fall

Wir betrachten im Folgenden die Differentialgleichung (kurz *DGL*)

$$y' = ay \tag{1}$$

mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$. Eine Lösung dieser Gleichung ist eine differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y'(t) = ay(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

a) Betrachten Sie zunächst $a = 1$ und raten Sie eine Lösung $y \neq 0$.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine Lösung der DGL (1).

c) Zeigen Sie, dass es für jedes $\hat{y} \in \mathbb{R}$ (den sog. *Anfangswert*) eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der DGL (1) mit $y(0) = \hat{y}$ gibt.

d*) Zeigen Sie, dass es für jeden Anfangswert $\hat{y} \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der DGL (1) mit $y(0) = \hat{y}$ gibt.

Aufgabe 2 Der mehrdimensionale Fall

Wir betrachten jetzt im Folgenden eine Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots & \quad \vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq n$. Eine Lösung dieser Gleichung ist ein Tupel $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ von Funktionen $y_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für jedes $1 \leq k \leq n$ und alle $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $y_k'(t) = a_{k1}y_1(t) + \cdots + a_{kn}y_n(t)$ erfüllt ist.

a) Machen Sie sich klar, dass Sie das Gleichungssystem auch in der Form

$$y' = Ay$$

mit einer reellen $n \times n$-Matrix A schreiben können. Eine Lösung ist dann eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $y'(t) = Ay(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$

b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Lösungen der DGL $y' = Ay$ ein linearer Teilraum im Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist.

Nach Aufgabe 1 liegt es nahe zu vermuten, dass $y(t) = e^{tA} \cdot \hat{y}$ mit einem Anfangswert $\hat{y} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung der DGL $y' = Ay$ ist.

c) Finden Sie eine Lösung der DGL $y' = Ay$ für den Fall, dass A eine Diagonalmatrix ist.

d) Sei A diagonalisierbar mit $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$S^{-1} e^{tA} S = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) ,$$

und folgern Sie, dass die Funktion $y(t) := e^{tA}\hat{y}$ für jeden Anfangswert $\hat{y} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung der DGL $y' = Ay$ ist.

e) Betrachte nun die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} ,$$

und folgern Sie, dass auch hier $y'(t) := e^{tA}\hat{y}$ für jeden Anfangswert $\hat{y} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung der DGL $y' = Ay$ ist.

f) Sei $A \in M_n$ eine Matrix mit ausschließlich reellen Eigenwerten, d.h. es gibt keine komplexen Eigenwerte. Betrachten Sie die Jordan-Normalform von A und zeigen Sie, dass $y(t) := e^{tA}\hat{y}$ für jeden Vektor eine Lösung der DGL $y' = Ay$ ist.

g*) Sei $A \in M_n$ eine reelle Matrix (u.U. mit komplexen) Eigenwerten, z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Finden Sie auch für diesen Fall eine Lösung der DGL $y' = Ay$.