Lineare Algebra 2
12. Tutorium
Die Matrix-Exponentialfunktion

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
06./07. Juli 2010

Für eine reelle oder komplexe $N \times N$-Matrix A definieren wir die Matrix $e^A = \exp(A)$ durch

$$e^A := \exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} .$$

In der ersten Aufgabe stellen wir uns die Frage, ob und in welchem Sinne diese Reihe konvergiert. Etwas zentraler für die Lineare Algebra sind die Aufgaben 2 und 3. Sie können Aufgabe 1 auch überspringen und annehmen, dass die obige Reihe in einem geeigneten Sinne konvergiert. **Fragen Sie ggf. Ihren Tutor**. In der zweiten Aufgabe untersuchen wir elementare Eigenschaften der Exponentialfunktion. In Aufgabe 3 wollen wir an einem konkreten Beispiel die Berechnung von $\exp(A)$ üben.

Aufgabe 1 Konvergenz der Exponentialreihe

a) Zeigen Sie, dass es für jede Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_N(\mathbb{C})$ eine Zahl $C \geq 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \langle A^n x, y \rangle \right| \leq C^n \cdot \|x\| \cdot \|y\| .$$

Hinweis: Sie können als Konstante C z.B. $\|A\|_{\text{op}} := \max\{\|Ax\| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$ wählen und zeigen:

$$\|Ax\| \leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|x\| , \qquad \|AB\|_{\text{op}} \leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|B\|_{\text{op}} .$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ die Reihe

$$Q(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle A^n x, y \rangle}{n!}$$

absolut konvergiert und dass $Q : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform ist.

Wir haben in Vorlesung und Übung gesehen, dass es zu der Sesquilinearform Q genau eine Matrix B gibt mit $Q(x, y) = \langle Bx, y \rangle$. Diese Matrix bezeichnen wir mit $\exp(A)$ oder e^A.

c*) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\text{op}}$ eine Norm auf $M_N(\mathbb{C})$ ist. Zeigen Sie, dass die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ bzgl. $\|\cdot\|_{\text{op}}$ (absolut) konvergiert. Geben Sie eine obere Schranke für die Konvergenzgeschwindigkeit an und zeigen Sie so, dass diese Reihe auf jeder beschränkten Teilmenge von $M_N(\mathbb{C})$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 2 Eigenschaften der Exponentialfunktion

a) Bestimmen Sie $\exp(D)$ für eine Diagonalmatrix D. Zeigen Sie insbesondere $\exp(0) = E$. Bestimmen Sie $\exp(A)$ für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sei im Folgenden $A \in M_N(\mathbb{C})$ eine beliebige Matrix.

b) Zeigen Sie $\exp(A^*) = \exp(A)^*$.

c) Zeigen Sie, dass für eine invertierbare Matrix $S \in M_N(\mathbb{R})$ gilt

$$\exp(S^{-1}AS) = S^{-1}\exp(A)S\ .$$

Folgern Sie, dass für jede hermitesche Matrix A die Matrix $\exp(A)$ positiv definit ist.

d) Seien $A, B \in M_N(\mathbb{C})$ Matrizen mit $AB = BA$. Zeigen Sie

$$\exp(A) \cdot B = B \cdot \exp(A)\ , \qquad\qquad \exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)\ .$$

Hinweis: Für die zweite Gleichung sollten Sie zuvor die binomische Formel $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$ zeigen.

Für kommutierende Matrizen A, B gilt also das Potenzgesetz $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$. Folgern Sie, dass $e^A = \exp(A)$ stets invertierbar ist mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Aufgabe 3 Bestimmung von $\exp(A)$

Bestimmen Sie $\exp(A)$ für die folgende Matrix in Jordannormalform

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Argumentieren Sie zuerst, warum es genügt $\exp(J)$ für die einzelnen Jordanblöcke J zu berechnen.
Hinweis: Wie können Sie einen Jordanblock in eine geeignete Summe zweier kommutierender Matrizen zerlegen?

Aufgabe 4 Zusatzaufgabe: Exponentialfunktion und Ableitung

Eine Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{C})$ nennen wir differenzierbar, wenn für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ die Funktion $f_{x,y}(t) := \langle\, \gamma(t)x, y\, \rangle$ differenzierbar ist, d.h. wenn der Grenzwert

$$f'_{x,y}(t_0) := \lim_{t\to 0} \frac{\langle\, (\gamma(t_0+t) - \gamma(t_0))x, y\, \rangle}{t}\ .$$

für alle $x, y \in \mathbb{C}^N$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ existiert. Analog zu Aufgabe 1 zeigt man, dass es dann genau eine Matrix $B \in M_N(\mathbb{C})$ mit

$$f'_{x,y}(t_0) = \langle\, Bx, y\, \rangle$$

für alle $x, y \in \mathbb{C}^N$ gibt. Für diese Matrix schreiben wir $\gamma'(t_0) = B$.

Sei $A \in M_N(\mathbb{C})$ fix. Im Folgenden betrachten wir die Abbildung

$$\gamma_A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{C}), \quad \gamma_A(t) := \exp(tA) = e^{tA}\ .$$

a) Zeigen Sie, dass γ_A ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ ist.

b) Seien $x, y \in \mathbb{C}^n$. Betrachten Sie noch einmal Aufgabe 1b) und zeigen Sie, dass die Potenzreihe

$$f_{x,y}(t) := \langle\, \gamma_A(t)x, y\, \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle\, A^n x, y\, \rangle}{n!}\, t^n$$

unendlichen Konvergenzradius hat. In der Analysis haben Sie gelernt, dass der Reihengrenzwert $f_{x,y}$ dann insbesondere eine differenzierbare Funktion ist. Zeigen Sie, dass für die Ableitung gilt

$$f'_{x,y}(t) = \langle\, \exp(tA)Ax, y\, \rangle\ ,$$

Wir haben damit gezeigt, dass $\gamma_A(t) = e^{tA}$ ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus ist mit

$$\gamma'(t) = e^{tA} \cdot A = A \cdot e^{tA}\ .$$

c*) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass es genau einen differenzierbaren Gruppenhomomorphismus $\gamma : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ mit $\gamma'(0) = A$ gibt, nämlich $\gamma(t) = \exp(tA)$.