Lineare Algebra 2
11. Tutorium
Zerlegungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
29. Juni 2010

Aufgabe 1 Q-R-Zerlegung

Sei $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ mit $\operatorname{rank}(B) = m$, d.h. die Spalten $b_1, b_2, \cdots, b_m \in \mathbb{K}^n$ von B sind linear unabhängig.

a) Beweisen Sie: B hat eine Zerlegung

$$B = QR,$$

wobei Q eine $n \times m$-Matrix ist, deren Spalten $u_1, \cdots, u_m$ ein Orthonormalsystem bilden und R eine obere $m \times m$-Dreiecksmatrix ist.

Hinweis: GRAM-SCHMIDTsches Orthogonalisierungsverfahren

b) Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A.

c) Warum erleichtert die QR-Zerlegung das Lösen von Gleichungssystemen $Ax = b$ (insbesondere wenn man sie für verschiedene rechte Seiten lösen muß)?

Aufgabe 2 Cholesky-Zerlegung

a) Beweisen Sie: Für jede positiv definite, reellwertige, symmetrische Matrix A gibt es eine obere Dreiecksmatrix R mit

$$A = R^T R$$

und positiven Diagonaleinträgen $r_{ii} > 0$.

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine obere Dreicksmatrix R, so dass $A = R^T R$ gilt.
Berechnen Sie damit auch die Inverse von A.

Aufgabe 3 Wurzel einer Matrix

Als Wurzel einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ bezeichnen wir alle Matrizen B, für die $A = BB$ gilt.

a) Bestimmen Sie eine Wurzel einer Diagonalmatrix mit nichtnegativen, reellen Diagonaleinträgen.

b) Bestimmen Sie eine Wurzel einer diagonalisierbaren Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$.

c) Finden Sie eine Matrix, die unendlich viele Wurzeln hat.

d) Zeigen Sie: Ist A symmetrisch und positiv semidefinit, so hat A genau eine symmetrische und positiv semidefinite Wurzel.

Singulärwert

Sei A eine komplexe $m \times n$-Matrix. Die Wurzeln $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$ der Eigenwerte von $A^T A$ heißen Singulärwerte von A.

Aufgabe 4 Singulärwert- und Polarzerlegung

a) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Wir setzten $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$ und $D := \operatorname{diag}\left(\sigma_1, \cdots, \sigma_n\right)$.
Beweisen Sie, dass dann orthogonale Matrizen $U, V \in O(n)$ existieren, so dass

$$A = UDV.$$

b) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar. Zeigen Sie mit a), dass eine orthogonale Matrix $U \in O(n)$ und eine positiv semidefinite Matrix S existiert mit

$$A = US,$$

wobei in jeder solcher Zerlegung $S = \sqrt{A^T A}$ gilt.

c) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{7} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ die Singulärwertzerlegung aus a) und die Polarzerlegung aus b).

Aufgabe 5 Pseudoinverse

Sei A eine komplexe $m \times n$-Matrix. Eine Matrix A^+ heißt pseudoinverse Matrix, wenn $A A^+$ und $A^+ A$ hermitesch sind und

$$A = A A^+ A \quad \text{und} \quad A^+ = A^+ A A^+$$

gilt.

a) Sei A eine komplexe $m \times n$-Matrix und $A^* A$ invertierbar. Zeigen Sie, dass gilt:

$$A^+ = (A^* A)^{-1} A^*.$$

b) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ und $A = UDV$ die Singulärwertzerlegung von A. Bestimmen Sie die pseudoinverse Matrix A^+ von A.

Bemerkung: Bei einer invertierbaren Matrix A gilt natürlich $A^+ = A^{-1}$.
Die pseudoinverse Matrix ist z.B. bei der Betrachtung von mehrdeutig lösbaren bzw. unlösbaren linearen Gleichungssystemen nützlich.