Lineare Algebra 2
10. Tutorium
Das Tensorprodukt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
22./23. Juni 2010

Aufgabe 1 Wirkungen auf Quadriken

Sei $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form.

a) Zeigen Sie, dass die folgende Menge G_Q eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist:

$$G_Q := \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad Q(Sx) = Q(x)\} .$$

b) Zeigen Sie, dass G_Q die Quadrik $M_Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = 1\}$ invariant lässt, d.h. G_Q wirkt auf der Menge M_Q durch $\gamma(S, x) := Sx$.

c*) Bestimmen Sie die Gruppe G_Q für die quadratische Form $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $Q(x, y) := x^2 - y^2$.

Aufgabe 2 Matrizen-Darstellung von Bilinearformen

Sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to V$ heißt *bilinear*, falls

$$F(\mathrm{v} + \mathrm{v}', w) = F(\mathrm{v}, w) + F(\mathrm{v}', w), \qquad F(\lambda \mathrm{v}, w) = \lambda F(\mathrm{v}, w),$$
$$F(\mathrm{v}, w + w') = F(\mathrm{v}, w) + F(\mathrm{v}, w'), \qquad F(\mathrm{v}, \lambda w) = \lambda F(\mathrm{v}, w).$$

für alle $\mathrm{v}, \mathrm{v}' \in \mathbb{R}^n$, $w, w' \in \mathbb{R}^m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Eine bilineare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ heißt auch *Bilinearform*.

a) Zeigen Sie analog zur Vorlesung, dass es für jede Bilinearform $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ genau eine $n \times m$-Matrix A gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$F(\mathrm{v}, w) = \mathrm{v}^T A w .$$

b) Für zwei Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ definieren wir eine Bilinearform $F_{x,y} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ durch

$$F_{x,y}(\mathrm{v}, w) := \langle x, \mathrm{v} \rangle \cdot \langle y, w \rangle . \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Matrix zu $F_{x,y}$.

Aufgabe 3 Das Tensorprodukt $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$

a) Machen Sie sich klar, dass die Menge aller Bilinearformen $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum bildet.

Den Vektorraum aller Bilinearformen $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nennen wir das *Tensorprodukt* von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ und schreiben dafür $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$. Die Bilinearformen $F_{x,y}$ aus Gleichung (1) nennen wir *elementare Tensoren* und schreiben hierfür jeweils $x \otimes y$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $y, y' \in \mathbb{R}^m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechenregeln mit elementaren Tensoren gelten:

$$(x + x') \otimes y = (x \otimes y) + (x' \otimes y), \qquad (\lambda x) \otimes y = \lambda(x \otimes y),$$
$$x \otimes (y + y') = (x \otimes y) + (x \otimes y'), \qquad x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y).$$

c) Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ und $f_1, \dots, f_m$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass es für jedes $F \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ eindeutig bestimmte Koeffizienten $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ gibt mit

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} e_i \otimes f_j \; .$$

Insbesondere ist jedes Element $F \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ eine Linearkombination elementarer Tensoren. Welche Dimension hat $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$?

Aufgabe 4 Zusatzaufgabe: Lineare Abbildungen auf dem Tensorprodukt

Oft ist einfacher, eine lineare Abbildung auf den elementaren Tensoren, statt auf ganz $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ zu definieren. Weil nicht alle elementaren Tensoren linear unabhängig sind, muss dabei auf Wohldefiniertheit geachtet werden.

a) Die **universelle Eigenschaft** des Tensorproduktes: Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to V$ eine bilineare Abbildung in einen Vektorraum V. Zeigen Sie, dass es dann genau eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \to V$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\tilde{\varphi}(x \otimes y) = \varphi(x, y)$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für $\sum_i x_i \otimes y_i = 0$ auch auch $\sum_i \varphi(x_i, y_i) = 0$ gilt.

b) Seien $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann eine lineare Abbildung definiert ist durch:

$$\varphi \otimes \psi : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m, \quad (\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) := \varphi(x) \otimes \psi(y) \; .$$

Aufgabe 5 Zusatzaufgabe: Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle\, x \otimes y, x' \otimes y' \,\rangle := \langle\, x,\ x' \,\rangle \cdot \langle\, y,\ y' \,\rangle$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ gegeben ist. Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$.

b) Sei $n = m$. Zeigen Sie, dass die Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ der symmetrischen Bilinearformen ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ ist. Finden Sie eine Orthonormalbasis von U. Wann liegt eine Bilinearform im Orthogonalraum $U^{\perp}$?