Lineare Algebra 2
8. Tutorium
„Darstellungen von Gruppen“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
8.–9. Juni 2010

Darstellungen

Sei G eine Gruppe. Eine *Darstellung* von G auf einem Vektorraum V ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)\,.$$

Ist V endlich-dimensional, so sprechen wir von einer *endlich-dimensionalen* Darstellung. Ist V ein reeller / komplexer Vektorraum , so heißt ρ auch *reelle / komplexe* Darstellung von G. Ist V ein euklidischer / unitärer Vektorraum, so heißt die Darstellung *orthogonal / unitär*, falls $\rho(g)$ für jedes $g \in G$ eine orthogonale / unitäre Abbildung ist.

Ein linearer Teilraum $U \subseteq V$ heißt *invariant* für ρ, falls für jedes $g \in G$ die Abbildung $\rho(g) : V \to V$ den Teilraum U invariant lässt, d.h. es gilt $\rho(g)(U) \subseteq U$ für jedes $g \in G$. Die Darstellung heißt *irreduzibel*, falls es außer $U = V$ und $U = \{0\}$ keine invarianten Teilräume gibt.

Aufgabe 1 Wirkungen und Darstellungen

In dieser Aufgabe stellen wir den Zusammenhang zu dem Tutorium zum Thema Gruppenwirkungen her. Für die weiteren Aufgaben dieses Tutoriums ist die Bearbeitung von Aufgabe 1 nicht notwendig. Sie können Aufgabe 1 also ggf. auch überspringen oder später bearbeiten.

Zur Erinnerung: Eine Wirkung der Gruppe G auf einer Menge X ist eine Abbildung $\gamma : G \times X \to X$ mit $\gamma(1, x) = x$ und $\gamma(gh, x) = \gamma(g, \gamma(h, x))$ für alle $g, h \in G, x \in X$. Wir betrachten hier speziell den Fall, dass $X = V$ ein Vektorraum ist. Wir nennen die Wirkung *linear*, falls die Abbildung $V \to V,\ x \mapsto \gamma(g, x)$ für jedes $g \in G$ linear ist.

a) Sei V ein Vektorraum, und sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung von G auf V. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung eine lineare Wirkung von G auf V ist:
$$\gamma_\rho : G \times V \to V, \quad \gamma_\rho(g, x) := \rho(g)(x)\,.$$

b) Sei nun umgekehrt $\gamma : G \times V \to V$ eine lineare Wirkung der Gruppe G auf dem Vektorraum V. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung eine Darstellung von G auf V ist
$$\rho_\gamma : G \to \mathrm{Aut}(V), \quad \rho_\gamma(g)(x) := \gamma(g, x)\,.$$

c) Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen den Darstellungen von G auf V und den linearen Wirkungen von G auf V gibt.

Im Fall $V = \mathbb{K}^n$ kann man sich das Gruppenelement $g \in G$ durch die Matrix $\rho(g)$ „dargestellt“ denken. Die Multiplikation in der Gruppe ist dann durch das Produkt der entsprechenden Matrizen gegeben.

Aufgabe 2 Adjungierte Darstellung

a) Sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Untergruppe. Machen Sie sich klar, dass die folgende Abbildung eine Darstellung von G auf dem reellen Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ ist:
$$\rho : G \to \mathrm{Aut}\big(M_n(\mathbb{R})\big), \quad \rho(S)(A) := SAS^{-1}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass diese Darstellung nicht irreduzibel ist.

c) Wir statten $M_n(\mathbb{R})$ mit dem Spur-Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(B^T A)$ aus. Zeigen Sie, dass diese Darstellung für die Gruppe $G = O_n(\mathbb{R})$ der orthogonalen Matrizen eine orthogonale Darstellung ist.

d) Finden Sie für die Darstellung von $O_n(\mathbb{R})$ mindestens zwei nicht-triviale, invariante Teilräume.

Aufgabe 3 Zerlegung endlich-dimensionaler, orthogonaler Darstellungen

a) Sei V ein Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ lineare Teilräume mit $V = U_1 \oplus U_2$. Seien $\rho_1 : G \to \mathrm{Aut}(U_1)$ und $\rho_2 : G \to \mathrm{Aut}(U_2)$ zwei Darstellungen einer Gruppe G. Zeigen Sie, dass

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(V), \quad \rho(g)(u_1 + u_2) = \rho_1(g)(u_1) + \rho_2(g)(u_2), \qquad u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$$

eine Darstellung von G ist. Die Darstellung ρ heißt die direkte Summe der Darstellungen ρ_1 und ρ_2. Wir schreiben auch $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$.

b) Sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung und $\mathsf{v} \in V$. Zeigen Sie, dass es einen kleinsten, invarianten Teilraum gibt, der v enthällt. Zeigen Sie weiter, dass dieser Teilraum der von den Vektoren $\rho(g)(\mathsf{v})$ mit $g \in G$ erzeugte, lineare Teilraum ist.

c) Sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine orthogonale Darstellung einer Gruppe G auf einem euklidischen Vektorraum V. Sei $U \subseteq V$ ein invarianter Teilraum. Zeigen Sie, dass dann auch der Orthogonalraum $U^\perp$ invariant ist.

Folgern Sie, dass ρ die direkte Summe der eingeschränkten Darstellungen $\rho_U : G \to \mathrm{Aut}(U)$ und $\rho_{U^\perp} : G \to \mathrm{Aut}(U^\perp)$ ist.

d) Sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine orthogonale Darstellung einer Gruppe G auf einem endlich-dimensionalen, euklidischen Vektorraum. Zeigen Sie, dass ρ die direkte Summe $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$ von irreduziblen Darstellungen ρ_i ist.

e) Zerlegen Sie die obige Darstellung der Gruppe $O_2(\mathbb{R})$ in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen.

Aufgabe 4 Darstellungen endlicher Gruppen

a) Zeigen Sie, dass jede irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe endlich-dimensional ist.

b) Sei G eine endliche Gruppe und $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine (u.U. nicht orthogonale) Darstellung auf einem euklidischen Vektorraum. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle \mathsf{v}, w \rangle_\rho := \sum_{g \in G} \langle \rho(g)(\mathsf{v}), \rho(g)(w) \rangle$$

ein Skalarprodukt auf V gegeben ist, so dass ρ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ eine orthogonale Darstellung ist. In diesem Sinne können wir uns bei endlichen Gruppen auf das Studium orthogonaler Darstellungen beschränken.

c*) Finden Sie eine irreduzible, orthogonale Darstellung der Permutationsgruppe S_n mit $n \geq 3$ auf einem Vektorraum mit Dimension größer gleich 2. *Hinweis:* Finden Sie zuerst eine Darstellung auf $\mathbb{R}^n$.