Lineare Algebra 2
7. Tutorium
Quaternionen und Oktaven

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
1. Juni 2010

Zur Bearbeitung:

Die erste Aufgabe entspricht der Aufgabe 6 des letzten Tutoriums. Sofern Sie diese noch nicht bearbeiten konnten, haben Sie nun nochmals Gelegenheit dazu.

Aufgabe 1 Orthogonale Abbildung

Zeigen Sie: Für jedes Quaternion $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ ist durch

$$x \mapsto L_q \circ R_{q^{-1}}(x) = qxq^{-1} =: A_q(x)$$

eine orthogonale Abbildung $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ gegeben.

Hinweis: In Aufgabe 5 des letzten Tutoriums haben Sie schon gezeigt, dass die Rechts- und Linksmultiplikation

$$R_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad x \mapsto xq$$
$$L_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad x \mapsto qx$$

mit einem Quaternion $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind. Sie müssen also für die Orthogonalität nur noch die Isometrie zeigen. Außerdem ist die Wohldefiniertheit nachzuprüfen, d.h. Sie müssen nachrechnen, ob für alle $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ auch $q^{-1}xq \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ gilt.

Aufgabe 2 Oktaven

Wir betrachten nun Paare von Quaternionen anstatt komplexer Zahlen und erklären auf $\mathbb{O} := \mathbb{H} \times \mathbb{H} = \mathbb{R}^8$ die Multiplikation durch

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{H}$.

a) Zeigen Sie, dass die Oktaven eine Divisionsalgebra sind, d.h. für alle $u, w \in \mathbb{O}$, $u \neq 0$, sind die Gleichungen $ux = w$ und $yu = w$ eindeutig lösbar in $\mathbb{O}$.

b) Warum bilden die Oktaven keinen Schiefkörper?

c) Die Konjugation der Oktaven $x = (a, b) \in \mathbb{O}$ ist definiert durch

$$\overline{(a, b)} := (\bar{a}, -b).$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Konjugation:

(i) $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$

(ii) $x\bar{x} = |x|^2$

Aufgabe 3 Multiplikation

Sei $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$. Der Imaginärteil $\mathrm{Im}(q) = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ kann mit dem Vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ identifiziert werden.
Zeigen Sie: Wenn man Quaternionen mit Paaren (s, u) aus einem Skalar $s = x_0 \in \mathbb{R}$ und einem Vektor $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ identifiziert, so lässt sich die Multiplikation mithilfe von Skalarprodukt und Vektorprodukt schreiben als

$$(s,u)\cdot(t,w) = (st - <u,w>,\ sw + tu + u \times w).$$

Aufgabe 4 Vier-Quadrate-Satz

Zeigen Sie: Das Produkt zweier Zahlen, die sich als Summe von vier Quadratzahlen schreiben lassen, ist selbst eine Summe von vier Quadratzahlen.

Bemerkung: Allgemeiner gilt, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadratzahlen schreiben lässt (i.A. nicht eindeutig).

Aufgabe 5 Einheitsquaternionen

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Einheitsquaternionen $\frac{x}{|x|} = \frac{x_0}{|x|} + \frac{x_1}{|x|} i + \frac{x_2}{|x|} j + \frac{x_3}{|x|} k$ mit $|x| = \sqrt{x\bar{x}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ bilden eine Gruppe.

b) Die Elemente $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ bilden innerhalb der Einheitsquaternionen eine Untergruppe, die sogenannte Quaternionengruppe.

c) Die Einheitsquaternionen entsprechen in der Matrixdarstellung der Gruppe SU(2).

Zusatzaufgabe*: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Zeigen Sie: Für ein Einheitsquaternion $q \neq 0$ definiert A_q aus Aufgabe 1 eine Drehung im $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ mit dem Winkel 2α um die Achse span $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, falls

$$q = \cos\alpha \cdot 1 + u \cdot \sin\alpha$$

mit $u \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$.