Lineare Algebra 2
6. Tutorium
Quaternionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
18. Mai 2010

Aufgabe 1: Quaternionen

Sei in $M_2(\mathbb{C})$ die folgende Teilmenge gegeben:

$$\mathbb{H} := \{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{C} \}.$$

Überlegen Sie sich, dass $\mathbb{H}$ ein vierdimensionaler Teilraum des achtdimensionalen **reellen** Vektorraums $M_2(\mathbb{C})$ ist und dass $\mathbb{H}$ bezüglich der Addition und Multiplikation von Matrizen alle Körperaxiome mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation erfüllt.

Hinweis: Die Kommutativität der Addition, sowie die Assoziativgesetze und das Distributivgesetz folgen bereits aus den entsprechenden Eigenschaften der Matrizenmultiplikation.

Aufgabe 2: Identifizierung mit $\mathbb{R}^4$

Überlegen Sie sich, dass man jedes Quaternion $q \in \mathbb{H}$ auch eindeutig in der Form

$$\alpha \cdot 1 + \beta i + \gamma j + \delta k$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ und $1, i, j, k \in \mathbb{H}$ schreiben kann. Bestimmen Sie dazu geeignete Elemente $1, i, j, k \in \mathbb{H}$, so dass i, j und k gemäß den Hamilton-Regeln multipliziert werden: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ und $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.

Quaternionale Konjugation

Zu jedem Quaternion

$$q = \alpha \cdot 1 + \beta i + \gamma j + \delta k$$

ist das konjugierte Quaternion definiert durch

$$\bar{q} = \alpha \cdot 1 - \beta i - \gamma j - \delta k.$$

Für $q \in \mathbb{H}$ definieren wir den Realteil

$$\mathrm{Re}(q) = \frac{1}{2}(q + \bar{q})$$

und den Imaginärteil

$$\mathrm{Im}(q) = \frac{1}{2}(q - \bar{q}).$$

Insbesondere heißt q *reell*, falls $q = \bar{q}$, und *rein imaginär*, falls $q = -\bar{q}$.

Aufgabe 3: Eigenschaften der quaternionalen Konjugation

Zeigen Sie, dass die quaternionale Konjugation folgende Eigenschaften hat:

(i) $\overline{(\bar{q})} = q$

(ii) $\overline{q + p} = \bar{q} + \bar{p}$

(iii) $\overline{q \cdot p} = \bar{p} \cdot \bar{q}$

(iv) $q \cdot \bar{q} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$

Aufgabe 4: Skalarprodukt

Rechnen Sie nach, dass durch $\mathrm{Re}(p\bar{q}) =: \langle p, q\rangle$ ein Skalarprodukt definiert wird.

Aufgabe 5: Multiplikation

Zeigen Sie, dass die Rechts- und Linksmultiplikation

$$R_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad x \mapsto xq$$
$$L_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad x \mapsto qx$$

mit einem Quaternion $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind.
Zeigen Sie außerdem: Falls $||q|| = 1$ gilt, sind R_q und L_q orthogonale Abbildungen.

Aufgabe 6: Orthogonale Abbildung

Zeigen Sie: Für jedes $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ ist durch

$$x \mapsto L_q \circ R_{q^{-1}}(x) = qxq^{-1} =: A_q(x)$$

eine orthogonale Abbildung $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ gegeben.