Lineare Algebra 2
5. Tutorium
Isometrie des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
18. Mai 2010

Zur Bearbeitung

Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen. Bearbeiten Sie die Aufgaben am besten nach der Reihenfolge, speziell die Zusatzaufgaben erst, wenn sie alle anderen verstanden haben.

Isometrie

Auf $\mathbb{R}^n$ ist durch $d(x,y) := ||x-y||$ die sogenannte *euklidische Abstandsformel* definiert. Damit wird $\mathbb{R}^n$ zu einem metrischen Raum.
Eine Abbildung $F : M \to M$ auf einem metrischen Raum heißt *Isometrie*, falls

$$d\left(F(x), F(y)\right) = d(x,y)$$

für alle $x, y \in M$ gilt.

Aufgabe 1: Lineare Isometrie

Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Isometrie, wenn $||\varphi(x)|| = ||x||$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 2: Rotationen

Zeigen Sie: Die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

(bzgl. der Standardbasis) gegebene lineare Abbildung ist eine Isometrie des $\mathbb{R}^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: Translationen

Sei $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^n$ ein fest gewählter Vektor. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung

$$T_{\mathsf{v}} : x \mapsto x + \mathsf{v}$$

eine Isometrie des $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 4: Isometrie mit Fixpunkt

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie mit $F(0) = 0$.
Zeigen Sie, dass F linear ist (vgl. Skript Neeb, 8.3.14 und 8.3.15).

Aufgabe 5: Eigenschaften von Isometrien

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Verkettung zweier Isometrien ist eine Isometrie.

b) Isometrien sind injektiv.

c) Isometrien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F(0) = 0$ sind Vektorraumautomorphismen.

d) Jede Isometrie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist von der Form $x \mapsto \varphi(x) + \mathsf{v}$, wobei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung ist und $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 6*: Zusatzaufgabe

Sei $O(n)$ die Menge aller isometrischen linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie:

a) Die Menge der Isometrien von $\mathbb{R}^n$, genannt $Isom(\mathbb{R}^n)$, bildet eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen.

b) $O(n) \times \mathbb{R}^n$ zusammen mit der Verknüpfung

$$(A, v) \cdot (B, w) := (A \cdot B,\ A(w) + v)$$

für $A, B \in O(n)$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$ bildet eine Gruppe. Diese ist isomorph zu $Isom(\mathbb{R}^n)$,

Anmerkung

Eine weitere Gruppenstruktur auf $O(n) \times \mathbb{R}^n$ wäre durch das *direkte Produkt* der beiden Gruppen $O(n)$ und $(\mathbb{R}^n, +)$ gegeben, nämlich

$$(A, v) \cdot (B, w) := (A \cdot B,\ v + w).$$

Die obige, kompliziertere Verknüpfung ist ein sogenanntes *semidirektes Produkt*. Man schreibt es $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 7*: Zusatzaufgabe

Überlegen Sie sich, dass in offensichtlicher Weise eine Gruppenwirkung von $Isom(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie: Die Wirkung ist transitiv.

b) Bestimmen Sie die Standgruppe des Nullpunktes.

c) Bestimmen Sie die Standgruppe eines beliebigen Vektors $v \in \mathbb{R}^n$.
Überlegen Sie sich dazu, dass für jede Gruppenwirkung gilt:

$$y = g.x \quad \Rightarrow G_y = g G_x g^{-1}.$$