Lineare Algebra 2
3. Tutorium
„Man erkennt die Gruppe an ihrer Wirkung“

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
4. Mai 2010

Zur Bearbeitung

Die Aufgaben dieses Tutoriums können voneinander unabhängig bearbeitet werden. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben bearbeiten. Wählen Sie nach Ihrem Interesse aus. Aufgabe 3 liefert drei Beispiele von Gruppenwirkungen, an denen man konkrete Rechnungen durchführen kann. Aufgabe 1 behandelt typische Klassen von Gruppenwirkungen, die Ihnen mit Sicherheit im Laufe Ihres Studiums über den Weg laufen. Aufgabe 2 beschäftigt sich näher mit dem Begriff der Bahn und der Standgruppe.

Gruppenwirkungen

Zur Erinnerung: Eine Untergruppe einer Gruppe $(G,\cdot)$ mit neutralem Element $1 \in G$ ist eine Teilmenge $H \subseteq G$ mit $1 \in H$, so dass für alle $g,h \in H$ auch $gh \in H$ und $g^{-1} \in H$ gilt. Untergruppen sind also genau die Teilmenge H, auf welche sich die Multiplikation der Gruppe einschränken lässt, so dass $(H,\cdot)$ wieder eine Gruppe mit neutralem Element 1 ist.

Sei G eine Gruppe mit neutralem Element $1 \in G$, und sei X eine Menge. Eine Abbildung

$$\gamma : G \times X \to X, \quad (g,x) \mapsto g.x := \gamma(g,x)$$

heißt *Gruppenwirkung* von G auf X, falls für alle $g,h \in G$ und $x \in X$ gilt

$$1.x = x\,, \qquad\qquad (gh).x = g.(h.x)\,.$$

Für ein Element $x \in X$ setzen wir

$$G.x := \{g.x : g \in G\}\,, \qquad\qquad G_x := \{g \in G : g.x = x\}\,.$$

Wir nennen die Menge $G.x$ die *Bahn* und G_x die *Standgruppe* von x. Die Wirkung heißt *transitiv*, falls für jedes $x \in X$ bereits $G.x = X$ gilt, d.h. für alle $x,y \in X$ gibt es ein $g \in G$ mit $g.x = y$.

Aufgabe 1 Beispielklassen

Aufgabe 1.1 Lineare Wirkungen

Die Menge $\mathrm{Aut}(V)$ der Automorphismen eines Vektorraum V wirkt auf diesem Vektorraum durch

$$\varphi.\mathrm{v} := \varphi(\mathrm{v}), \qquad \varphi \in \mathrm{Aut}(V), \mathrm{v} \in V\,.$$

Etwas spezieller, die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen wirkt auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$S.x := S \cdot x, \qquad S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Wirkungen für $V \neq \{0\}$ nicht transitiv sind.

Aufgabe 1.2 Translationen

Eine Gruppe G mit neutralem Element $1 \in G$ wirkt auf sich selbst durch

$$g.h := gh \qquad g,h \in G\,. \tag{1}$$

Ein Spezialfall ist die additive Gruppe $(V,+)$ eines Vektorraumes, die auf dem Vektorraum wirkt durch

$$\mathrm{v}.w := \mathrm{v} + w, \qquad \mathrm{v}, w \in V$$

Zeigen Sie, dass die Wirkung (1) einer Gruppe auf sich selbst transitiv ist mit Standgruppe $G_h = \{1\}$ für jedes $h \in G$.

Aufgabe 1.3 Basistransformation

Die Gruppe $\mathrm{Aut}(V)$ der Automorphismen eines Vektorraums V wirkt auf der Menge $\mathrm{End}(V)$ der Endomorphismen durch

$$\alpha.\varphi := \alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}, \qquad \alpha \in \mathrm{Aut}(V), \varphi \in \mathrm{End}(V)\,.$$

Etwas spezieller wird die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren Matrizen wirkt der Menge $M_n(\mathbb{R})$ aller Matrizen durch

$$S.A := SAS^{-1} \qquad S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A \in M_n(\mathbb{R})\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Wirkungen für $V \neq \{0\}$ bzw. $n \neq 0$ nicht transitiv ist. Wie heißen die Bahnen der Wirkung?

Aufgabe 2 Bahngleichung

Sei $G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto g.x$ eine Gruppenwirkung einer Gruppe G mit neutralem Element $1 \in G$ auf einer Menge X. Sei $x \in X$ fix. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf G durch

$$g \sim h \quad :\Longleftrightarrow \quad g.x = h.x\,.$$

a) Die Standgruppe G_x ist eine Untergruppe von G.[1]

b) Die Relation $\sim$ ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf G. Wir schreiben $[g]$ für die Äquivalenzklasse eines Elementes $g \in G$ und bezeichnen mit $(G/\sim) = \{[g] : g \in G\}$ die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$.

c) Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $h \mapsto gh$ eine Bijektion von $[1] = G_x$ nach $[g]$. Insbesondere haben damit alle Äquivalenzklassen die gleiche Anzahl von Elementen.

d) Die Abbildung $(G/\sim) \to G.x,\ [g] \mapsto g.x$ ist wohldefiniert und bijektiv.

e) Sei G endlich. Folgern Sie, dass für die jeweilige Anzahl von Elementen gilt

$$|G| = |G.x| \cdot \left|G_x\right|\,.$$

Aufgabe 3 Konkrete Beispiele

a) Wir definieren eine Wirkung der Gruppe $(\mathbb{R},+)$ auf der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen durch

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t,z) := e^t \cdot z\,.$$

Skizzieren Sie die Bahnen dieser Wirkung und bestimmen Sie die Standgruppen.

b) Wir modifizieren die obige Wirkung etwas und betrachten nun die folgende Wirkung von $(\mathbb{R},+)$ auf $\mathbb{C}$:

$$\gamma_i \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t,z) := e^{it} \cdot z\,.$$

Skizzieren Sie die Bahnen und bestimmmen Sie die Standgruppen der Wirkung γ_i.

c) Die beiden Wirkungen γ_1 und γ_i sind beide von der Form

$$\gamma_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t,z) := e^{\lambda \cdot t} \cdot z$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Skizzieren Sie die Bahnen der Wirkung.

Aufgabe 4* Rotationen des Einheitskreises

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fix. Wir betrachten die folgende Wirkung $\mathbb{Z} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ der Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen auf dem komplexen Einheitskreis $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ mit [2]

$$n.z := e^{i\alpha n} \cdot z \qquad \text{bzw.} \qquad n.e^{it} := e^{i(\alpha n + t)}\,.$$

Berechnen Sie die Standgruppe und die Bahn eines Elementes $x \in \mathbb{T}$.

[1] Dies rechtfertigt auch den Name Stand*gruppe*.

[2] Man bemerke, dass diese Wirkung eine Einschränkung der Wirkung γ_λ mit $\lambda = i\alpha$ aus Aufgabe 3 ist.