Lineare Algebra 2
2. Tutorium

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
27. April 2010

Stochastische Matrizen

Ein Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ heißt *Wahrscheinlichkeitsvektor*, wenn alle Einträge x_i nicht-negativ sind und $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ gilt. Eine Matrix $T \in M_n(\mathbb{R})$ heißt *stochastische Matrix*, falls alle Einträge nicht-negativ sind und die Spaltensumme in jeder Spalte gleich 1 ist. Wir sagen ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist *invariant* unter einer Matrix $T \in M_n(\mathbb{R})$, falls $Tx = x$ gilt.

Zur Interpretation betrachten wir ein System, welches sich in n Zuständen $\{s_1, \dots, s_n\}$ befinden kann. Ein Wahrscheinlichkeitsvektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf diesen Zuständen. Die Zahl x_i gibt dabei jeweils die Wahrscheinlichkeit an, dass sich das System im Zustand s_i befindet.

Eine stochastische Matrix $T = (t_{i,j})_{i,j}$ beschreibt zufällige Zustandswechsel. Befindet sich das System im Zustand s_j, so beschreibt der Wert $t_{i,j}$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach einem (Zeit-)Schritt im Zustand s_i befindet.

I.d.R. kennt man nicht den genauen Zustand des Systems, sondern nur die Wahrscheinlichkeiten $x_1, \dots, x_n$, mit welchen sich das System in einem bestimmmten Zustand befindet. Der i-te Eintrag $(Tx)_i$ des Vektors Tx gibt dann an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich das System nach einem Schritt im Zustand s_i befindet. D.h. Tx beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach einem Schritt.

Aufgabe 1 Beispiele

Vergewissern Sie sich, dass die folgenden Matrizen stochastische Matrizen sind:

$$T_1 = E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 Übergangsgraphen

Ähnlich wie bei Permutationen lassen sich die Übergänge einer stochastischen Matrix sehr gut als sog. (gewichteter) *Übergangsgraph* veranschaulichen. Die Zustände bilden dabei die Knoten des Graphen, die Übergänge (Einträge der Matrix) bilden die Kanten und deren Beschriftung. Die stochastische Matrix T_3 aus Aufgabe 1 ist z.B. in Abbildung 1 dargestellt.[1]

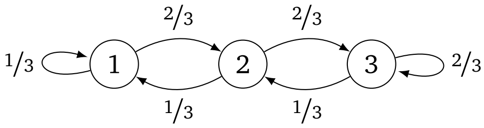

Abbildung 1: Übergangsgraph von T_3

[1] Mit einer 0 beschriftete Kanten werden üblicherweise weggelassen.

a) Zeichnen Sie auch die Übergangsgraphen zu den Matrizen T_1 und T_2 aus Aufgabe 1.

b) Stellen Sie die stochastische Matrix zum Übergangsgraphen aus Abbildung 2 auf.

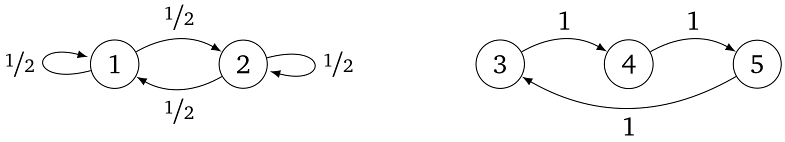

Abbildung 2: Übergangsgraph

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass für eine Matrix $T \in M_n(\mathbb{R})$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) T ist eine stochastische Matrix.

(ii) Für jeden Wahrscheinlichkeitsvektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist Tx wieder ein Wahrscheinlichkeitsvektor.

b) Zeigen Sie, dass das Produkt von zwei stochastischen Matrizen wieder eine stochastische Matrix ist.

Insbesondere ist für eine stochastische Matrix $T = (t_{i,j})_{i,j}$ jede Potenz $T^n =: (t^{(n)}_{i,j})_{i,j}$ wieder eine stochastische Matrix.

c) Schreiben Sie den Eintrag $t^{(n)}_{i,j}$ von T^n als Summe von Produkten der Einträge von T. Wie lassen sich die einzelnen Summanden im Sinne von Zustandsübergängen interpretieren?

Aufgabe 4 Der PageRank

Der sog. PageRank ist die Grundlage des Algorithmus, der von einigen Suchmaschinen zur Bewertung von Internetseiten verwendet wird. Das Bewertungsverfahren beruht auf der Berechnung eines invarianten Wahrscheinlichkeitsvektors der im Folgenden beschriebenen stochastischen Matrix:

Sei $0 \leq p \leq 1$. Wir betrachten ein System von n Internetseiten $\{s_1, \ldots, s_n\}$. Der Benutzer des Systems betrachtet eine dieser Seiten s_i. Auf der Seite s_i befinden sich Links zu den Seiten $\{s_{j_1}, \ldots, s_{j_k}\}$. Welche Seite der Benutzer sich als nächstes ansieht, entscheidet er nach folgendem System:

a) Mit Wahrscheinlichkeit p klickt der Benutzer einen der Links zu $\{s_{j_1}, \ldots, s_{j_k}\}$ an und betrachtet danach die entsprechende Seite. Welchen der Links er wählt, ist zufällig. Alle Links haben die gleiche Wahrscheinlichkeit gewählt zu werden.[2]

b) Mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ wechselt der Benutzer zu einer der Seiten $\{s_1, \ldots, s_n\}$ des Systems. Welche der Seiten er wählt, ist zufällig. Alle Seiten haben die gleiche Wahrscheinlichkeit gewählt zu werden.

Stellen Sie für das System von Internetseiten aus Abbildung 3 die stochastische Matrix des PageRank-Algorithmus mit Parameter $p := 2/3$ auf. Bestimmen Sie den invarianten Wahrscheinlichkeitsvektor.

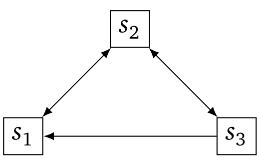

Abbildung 3: System von Internetseiten

[2] Enthällt die Seite s_i keine Links, so führt man künstlich Links zu jeder anderen Seite ein. Äquivalent kann man annehmen, dass in diesem Fall mit Wahrscheinlichkeit 1 (statt $1 - p$) nach dem Prinzip in b) entschieden wird.

Aufgabe 5* Invariante Wahrscheinlichkeitsvektoren

Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass eine stochastische Matrix $T \in M_n(\mathbb{R})$ immer einen invarianten Wahrscheinlichkeitsvektor besitzt, d.h. es gibt einen Wahrscheinlichkeitsvektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Tx = x$.

a) Zeigen Sie, dass jede stochastische Matrix $T \in M_n(\mathbb{R})$ den Eigenwert 1 besitzt.
Hinweis: Betrachten Sie die transponierte Matrix zu T.

Es gibt also eine Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Tx = x$. Wir müssen jetzt noch zeigen, dass es einen solchen Vektor mit positiven Einträgen gibt. Genauer werden wir zeigen, dass für jeden Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $Tx = x$ auch der Vektor der Beträge $|x| := (\left|x_1\right|, \dots, \left|x_n\right|)^T$ die Gleichung $T|x| = |x|$ erfüllt.

b) Hierzu betrachten wir zuerst den Fall, dass T eine 2×2-Matrix ist, d.h.

$$T =: \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} .$$

Sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor mit $Tx = x$ und $x_1 \geq 0 > x_2$. Zeigen Sie, dass dann $t_{12} = 0$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Differenz $\delta := x_1 - x_2$ und schätzen Sie geeignet ab.

Folgern Sie, dass auch $|x| = (x_1, -x_2)^T$ ein invarianter Vektor ist.

c) Sei nun $T = (t_{i,j})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ eine stochasticshe Matrix und $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $Tx = x$. Verallgemeinern Sie ihr Vorgehen in Aufgabenteil b) und zeigen Sie so, dass für alle Indizes $1 \leq i, j \leq n$ gilt:

$$x_i \geq 0 > x_j \qquad \Longrightarrow \qquad t_{i,j} = 0 .$$

Hinweis: Sie können o.B.d.A. (warum?) annehmen, dass $x_1, \dots, x_k \geq 0 > x_{k+1}, \dots, x_n$ gilt. Betrachten Sie dann die Differenz $\delta := \sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=k+1}^{n} x_i$.

d) Zeigen Sie, dass jede stochastische Matrix $T \in M_n(\mathbb{R})$ einen invarianten Wahrscheinlichkeitsvektor besitzt.