Lineare Algebra 2
1. Tutorium

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
20. April 2010

Aufgabe 1 Polynome von Matrizen

In Polynome mit Koeffizienten in eime Körper $\mathbb{K}$ lassen sich nicht nur Elemente aus $\mathbb{K}$, sondern auch quadratische Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$ einsetzen. Für ein Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ in $\mathbb{K}[t]$ und eine $n \times n$-Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ definieren wir

$$p(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k A^k ,$$

wobei $A^0 := E$.

a) Bestimmen Sie für das Polynom $p(t) = t^2$ die Matrizen $p(A), p(B)$ und $p(C)$ für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie $p(B)$ für ein beliebiges Polynom $p \in \mathbb{K}[t]$.

c) Sei $p \in \mathbb{K}[t]$ ein Polynom und $D \in M_n(\mathbb{K})$ eine Diagonalmatrix. Wie sieht $p(D)$ aus?

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ ein Polynom $p \in \mathbb{K}[t]$ gibt mit $p(A) = 0$.
Hinweis: Betrachten Sie den endlich-dimensionalen Vektorraum $M_n(\mathbb{K})$.

Aufgabe 3 Elementare Eigenschaften

a) Zeigen Sie, dass für ein Polynom $p \in \mathbb{K}[t]$, eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ gilt:

$$p(SAS^{-1}) = S\,p(A)\,S^{-1} .$$

b) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass für alle Polynome $p, q \in \mathbb{K}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A) , \qquad (\lambda p)(A) = \lambda p(A) , \qquad (p \cdot q)(A) = p(A) \cdot q(A) .$$

Aufgabe 4 Funktionen von Matrizen

Wir betrachten im Folgenden stets Matrizen mit reellen Einträgen, d.h. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für viele Zwecke ist es nützlich, auch für andere reellwertige Funktionen f eine Matrix $f(A)$ bilden zu können.

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wie würden Sie $f(D)$ für eine Diagonalmatrix D definieren? Wie würden Sie $f(SDS^{-1})$ für $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ definieren?

b) Wie und wann lässt sich auf sinnvolle Weise $f(A)$ für die Funktion $f(t) := 1/t$ definieren?

c) Wie und wann lässt sich auf sinnvolle Weise $f_\lambda(A)$ für die Funktion $f_\lambda(t) := 1/(t-\lambda)$ mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ bilden?

(d*) Wie und wann lässt sich sich $\exp(A)$ für die Exponentialfunktion $\exp(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ definieren?