Lineare Algebra 2
12. Tutorium
Die Matrix-Exponentialfunktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
06./07. Juli 2010

Lösung 1 Konvergenz der Exponentialreihe

a) Für $A \in M_N(\mathbb{C})$ und $0 \neq x \in \mathbb{C}^N$ ist $x/\|x\|$ ein Einheitsvektor, und somit gilt

$$\|Ax\| = \|A(x/\|x\|)\| \cdot \|x\| \leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|x\| \,.$$

Für Matrizen $A, B \in M_N(\mathbb{C})$ folgt damit

$$\|AB\|_{\text{op}} = \max\{\|ABx\| : x \in \mathbb{C}^N, \|x\| \leq 1\} \leq \max\{\|A\|_{\text{op}} \cdot \|Bx\| : x \in \mathbb{C}^N, \|x\| \leq 1\} = \|A\|_{\text{op}} \cdot \|B\|_{\text{op}} \,.$$

Mit vollständiger Induktion folgt daraus insbesondere $\|A^n\|_{\text{op}} \leq (\|A\|_{\text{op}})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt sich dann

$$\left|\left\langle A^n x, y \right\rangle\right| \leq \|A^n x\| \left\|y\right\| \leq \|A^n\|_{\text{op}} \cdot \|x\| \cdot \left\|y\right\| \leq (\|A\|_{\text{op}})^n \cdot \|x\| \cdot \left\|y\right\| \,.$$

b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!} \cdot \|x\| \cdot \left\|y\right\| = e^C \|x\| \cdot \left\|y\right\|$ ist eine konvergente Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\langle A^n x, y \rangle|}{n!}$. Somit konvergiert die Reihe $Q(x,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^N$. Weil die Abbildungen $(x,y) \mapsto \left\langle A^n x, y \right\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$ sequilinear sind, sieht man mit Hilfe der Grenzwertsätze sofort, dass Q eine Sequilinearform ist.

Lösung 2 Eigenschaften der Exponentialfunktion

a) Für eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ gilt $D^n = \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_N^n)$ und damit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \lambda_1^k/k! & & & \\ & \sum_{k=0}^{n} \lambda_2^k/k! & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{n} \lambda_N^k/k! \end{pmatrix}$$

Für den Grenzwert der Exponentialfunktion folgt

$$\exp(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^n/n! & & & \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_2^n/n! & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_N^n/n! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_N} \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist nilpotent mit $A^3 = 0$. Die Reihe für $\exp(A)$ ist damit nur eine endliche Summe.

$$\exp(A) = E + A + \tfrac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Folgenden Identitäten sind u.U. durch ein Grenzwertargument oder über die Eindeutigkeit der Matrix einer quadratischen Form (siehe Aufgabe 1) zu rechtfertigen.

b)

$$\exp(A^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^*)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n)^*}{n!} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\Big)^* = \exp(A)^* \,.$$

c)

$$\exp(S^{-1}AS) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}AS)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{-1}A^nS}{n!} = S^{-1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\Big)S = S^{-1}\exp(A)S \,.$$

d)

$$\exp(A)B = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\Big)B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^nB}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{BA^n}{n!} = B\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = B\exp(A) \,.$$

Die binomisch Formel zeigt man leicht direkt mit vollständiger Induktion. Dann folgt

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k}A^kB^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\,\frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}\,\frac{B^j}{j!} = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}\Big) = \exp(A)\cdot\exp(B) \,.\end{aligned}$$

Da A und $B := -A$ kommutieren, folgt daraus insbesondere $e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = E$, d.h. e^{-A} ist die Inverse von e^A.

Lösung 3 Bestimmung von $\exp(A)$

Beim Potenzieren einer Diagonal-Blockmatrix werden nur die einzelnen Blöcke potenziert. Insbesondere folgt also

$$\exp\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} J_1^n & 0 \\ 0 & J_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(J_1) & 0 \\ 0 & \exp(J_2) \end{pmatrix}$$

Einen einzelnen $d \times d$-Jordanblock können wir in die entspr. Diagonalmatrix und den nilpotenten Anteil $J = D + R$ zerlegen:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} .$$

Weil D ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist, kommutiert D insbesondere mit R. Es gilt also $e^J = e^{D+R} = e^D \cdot e^R = e^\lambda \cdot e^R$. Für den nilpotenten Anteil R verschwindet die d-te Potenz, d.h. $R^d = 0$. Die Exponentialreihe ist also eine endliche Summe. Speziell für die Jordanblöcke $J_1 = D_1 + R_1$ und $J_2 = D_2 + R_2$ aus dem Beispiel gilt

$$\exp(R_1) = E + R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \exp(R_2) = E + R_2 + \tfrac{1}{2}R_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Insgesammt ergibt für die Matrix A ergibt sich damit

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(J_1) & \\ & \exp(J_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^0\exp(R_1) & \\ & e^2\exp(R_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & e^2 & e^2 & e^2 \\ & & 0 & e^2 & e^2 \\ & & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} .$$