Lineare Algebra 2
10. Tutorium
Das Tensorprodukt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
22./23. Juni 2010

Lösung 1 Wirkungen auf Quadriken

Sei $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form.

a) Zeigen Sie, dass die folgende Menge G_Q eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist:

$$G_Q := \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad Q(Sx) = Q(x)\} .$$

b) Zeigen Sie, dass G_Q die Quadrik $M_Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = 1\}$ invariant lässt, d.h. G_Q wirkt auf der Menge M_Q durch $\gamma(S, x) := Sx$.

c*) Bestimmen Sie die Gruppe G_Q für die quadratische Form $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $Q(x, y) := x^2 - y^2$.

---

a) Es gilt $Q(x) = Q(Ex)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. die Einheitsmatrix E liegt in G_Q. Für $S, T \in G_Q$ liegt auch $S \cdot T$ in G_Q, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$Q(STx) = Q(Tx) = Q(x) .$$

b) Ist $x \in M_Q$, d.h. $Q(x) = 1$, und $S \in G_Q$, so gilt auch $Q(Sx) = Q(x) = 1$, also $Sx \in M_Q$.

Lösung 2 Matrizen-Darstellung von Bilinearformen

Sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to V$ heißt *bilinear*, falls

$$F(\mathsf{v} + \mathsf{v}', w) = F(\mathsf{v}, w) + F(\mathsf{v}', w) , \qquad F(\lambda \mathsf{v}, w) = \lambda F(\mathsf{v}, w) ,$$
$$F(\mathsf{v}, w + w') = F(\mathsf{v}, w) + F(\mathsf{v}, w') , \qquad F(\mathsf{v}, \lambda w) = \lambda F(\mathsf{v}, w) .$$

für alle $\mathsf{v}, \mathsf{v}' \in \mathbb{R}^n$, $w, w' \in \mathbb{R}^m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Eine bilineare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ heißt auch *Bilinearform*.

a) Zeigen Sie analog zur Vorlesung, dass es für jede Bilinearform $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ genau eine $n \times m$-Matrix A gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$F(\mathsf{v}, w) = \mathsf{v}^T A w .$$

b) Für zwei Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ definieren wir eine Bilinearform $F_{x,y} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ durch

$$F_{x,y}(\mathsf{v}, w) := \langle x, \mathsf{v} \rangle \cdot \langle y, w \rangle . \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Matrix zu $F_{x,y}$.

---

a) Bezeichne $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ und $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}^m$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^m$. Setze $A := (a_{i,j})$ mit $a_{i,j} := F(e_i, f_j)$. Mittels Bilinearität rechnet man dann leicht nach, dass $F(x, y) = x^T A y$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ gilt.

Ist $B = (b_{i,j})_{i,j}$ eine andere Matrix mit $F(x, y) = x^T B y$ für alle $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^m$, so folgt insbesondere $b_{i,j} = e_i^T B f_j = F(e_i, f_j) = a_{i,j}$ und somit $A = B$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$F_{x,y}(\mathsf{v}, w) = \mathsf{v}^T x \cdot w^T y = \mathsf{v}^T x \cdot y^T w = \mathsf{v}^T (x y^T) w ,$$

d.h. $x y^T$ ist die Matrix von $F_{x,y}$.

Lösung 3 Das Tensorprodukt $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$

a) Machen Sie sich klar, dass die Menge aller Bilinearformen $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum bildet.

Den Vektorraum aller Bilinearformen $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nennen wir das *Tensorprodukt* von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ und schreiben dafür $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$. Die Bilinearformen $F_{x,y}$ aus Gleichung (2) nennen wir *elementare Tensoren* und schreiben hierfür jeweils $x \otimes y$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $y, y' \in \mathbb{R}^m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechenregeln mit elementaren Tensoren gelten:

$$\begin{aligned} (x+x') \otimes y &= (x \otimes y) + (x' \otimes y)\,, & \qquad (\lambda x) \otimes y &= \lambda(x \otimes y)\,, \\ x \otimes (y+y') &= (x \otimes y) + (x \otimes y')\,, & \qquad x \otimes (\lambda y) &= \lambda(x \otimes y)\,. \end{aligned}$$

c) Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ und $f_1, \dots, f_m$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass es für jedes $F \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ eindeutig bestimmte Koeffizienten $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$ gibt mit

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} e_i \otimes f_j\ .$$

Insbesondere ist jedes Element $F \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ eine Linearkombination elementarer Tensoren. Welche Dimension hat $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$?

---

c) Für jede Bilinearform $F \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ gibt es genau eine Matrix A, so dass $F(v, w) = v^T A w$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^m$ gilt. Die Matrix $A =: (a_{i,j})_{i,j}$ ist eine Linearkombination der kanonischen Einheitsmatrizen $E_{i,j} = e_i f_j^T$, genauer

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{i,j} a_{i,j} e_i f_j^T\ .$$

Für die Bilinearform F gilt also

$$F(v, w) = v^T A w = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} v^T e_i f_j^T w = \sum_{i,j} a_{i,j} F_{e_i, f_j}(v, w) = \sum_{i,j} a_{i,j}\ e_i \otimes f_j\ .$$

Sind $b_{i,j}$ Koeffizienten mit $F = \sum_{i,j} b_{i,j} e_i \otimes f_j$, so gilt $a_{i,j} = F(e_i, f_j) = b_{i,j}$, denn für alle i, j, k, ℓ gilt

$$F_{e_i, e_j}(e_k, e_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = k, j = \ell\ , \\ 0 & \text{, sonst}\ . \end{cases}$$

Lösung 4 Zusatzaufgabe: Lineare Abbildungen auf dem Tensorprodukt

Oft ist einfacher, eine lineare Abbildung auf den elementaren Tensoren, statt auf ganz $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ zu definieren. Weil nicht alle elementaren Tensoren linear unabhängig sind, muss dabei auf Wohldefiniertheit geachtet werden.

a) Die **universelle Eigenschaft** des Tensorproduktes: Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to V$ eine bilineare Abbildung in einen Vektorraum V. Zeigen Sie, dass es dann genau eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \to V$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\tilde{\varphi}(x \otimes y) = \varphi(x, y)$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für $\sum_i x_i \otimes y_i = 0$ auch auch $\sum_i \varphi(x_i, y_i) = 0$ gilt.

b) Seien $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann eine lineare Abbildung definiert ist durch:

$$\varphi \otimes \psi : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m, \quad (\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) := \varphi(x) \otimes \psi(y)\ .$$

a) Wir zeigen zuerst den Hinweis: Seien $x_i \in \mathbb{R}^n, y_i \in \mathbb{R}^m$ mit $\sum_i x_i \otimes y_i = 0$. Wir zerlegen x_i und y_i jeweils bzgl. der kanonischen Basis, d.h. es gibt Koeffizienten $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$ mit

$$x_i = \sum_j a_{i,j} e_i \,, \qquad\qquad y_i = \sum_j b_{i,j} f_j \,.$$

Somit gilt

$$0 = \sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i \sum_{j_1,j_2} a_{i,j_1} b_{i,j_2} e_{j_1} \otimes f_{j_2} = \sum_{j_1,j_2} \Big(\sum_i a_{i,j_1} b_{i,j_2} \Big) e_{j_1} \otimes f_{j_2} \,.$$

Weil die Elemente $e_{j_1} \otimes f_{j_2}$ eine Basis bilden, folgt $\sum_i a_{i,j_1} b_{i,j_2} = 0$ für alle Indizes j_1, j_2. Somit gilt auch wegen der Bilinearität von φ

$$\sum_i \varphi(x_i, y_i) = \sum_i \sum_{j_1,j_2} a_{i,j_1} b_{i,j_2} \varphi(e_i, f_j) = \sum_{j_1,j_2} \Big(\sum_i a_{i,j_1} b_{i,j_2} \Big) \varphi(e_i, f_j) = 0 \,.$$

Widmen wir uns nun der allg. Behauptung: Wir definieren $\tilde{\varphi}$ durch

$$\tilde{\varphi}\Big(\sum_i \alpha_i x_i \otimes y_i \Big) := \sum_i \alpha_i \varphi(x_i, y_i)$$

für alle $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \in \mathbb{R}^n, y_i \in \mathbb{R}^m$ und müssen nun zeigen, dass dies eine wohldefinierte Abbildung ergibt. Wir haben zuvor gesehen, dass jeder Vektor $F \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ eine Linearkombination elementarer Tensoren ist. Somit ist $\tilde{\varphi}$ auf jeden Vektor in $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ definiert. Um zu zeigen, dass die Definition nicht mehrdeutig ist, seien $\alpha_i, \alpha'_j \in \mathbb{R}$, $x_i, x'_j \in \mathbb{R}^n$ und $y_i, y'_j \in \mathbb{R}^m$ mit $\sum_i \alpha_i x_i \otimes y_i = \sum_j \alpha'_j x'_j \otimes y'_j$, d.h.

$$0 = \sum_i (\alpha_i x_i) \otimes y_i - \sum_j (\alpha'_j x_j) \otimes y_j \,.$$

Dann folgt aus den Vorbetrachtungen mit Bilinearität von φ

$$0 = \sum_i \varphi(\alpha_i x_i, y_i) - \sum_j \varphi(\alpha_j x'_j, y'_j) = \sum_i \alpha_i \varphi(x_i, y_i) - \sum_j \alpha'_j \varphi(x'_j, y'_j) \,,$$

d.h. $\sum_i \alpha_i \varphi(x_i, y_i) = \sum_j \alpha'_j \varphi(x'_j, y'_j)$.

b) folgt aus dem vorherigen Aufgabenteil, denn $(x, y) \mapsto \varphi(x) \otimes \psi(y)$ ist bilinear.

Lösung 5 Zusatzaufgabe: Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle\, x \otimes y, x' \otimes y' \,\rangle := \langle\, x,\ x' \,\rangle \cdot \langle\, y,\ y' \,\rangle$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ gegeben ist. Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$.

b) Sei $n = m$. Zeigen Sie, dass die Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ der symmetrischen Bilinearformen ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ ist. Finden Sie eine Orthonormalbasis von U. Wann liegt eine Bilinearform im Orthogonalraum $U^\perp$?

---

a) Für feste Vektoren $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ ist die Abbildung $(x', y') \mapsto \langle\, x, x' \,\rangle \cdot \langle\, y, y' \,\rangle$ bilinear. Aus der universellen Eigenschaft folgt dann, dass es eine lineare Fortsetzung von $x' \otimes y' \to \langle\, x, x' \,\rangle \langle\, y, y' \,\rangle$ auf das Tensorprodukt gibt, d.h. für $F = \sum_i \alpha'_i x'_i \otimes y'_i \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ gilt

$$\Big\langle\, x \otimes y,\ \sum_i \alpha'_i x'_i \otimes y'_i \,\Big\rangle = \sum_i \alpha'_i \big\langle\, x \otimes y,\ x'_i \otimes y'_i \,\big\rangle \,. \tag{2}$$

Sei nun $F' = \sum_i \alpha'_i x'_i \otimes y'_i \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ ein fester Vektor. Man rechnet mit (2) leicht nach, dass die Abbildung $(x, y) \mapsto \langle\, x \otimes y, F' \,\rangle$ bilinear ist. Nach der universellen Eigenschaft gibt es dann eine lineare Fortsetzung von $x \otimes y \mapsto \langle\, x \otimes y, F \,\rangle$ auf das Tensorprodukt. Das Skalarprodukt ist somit linear in der ersten Komponente.

Betrachtet man $(x', y') \mapsto \langle\, F, x' \otimes y' \,\rangle$, so folgt analog, dass das Skalarprodukt in der zweiten Komponente linear ist.

Für die Definitheit sei $F = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} e_i \otimes f_j$ ein Vektor in $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\langle F, F \rangle = \Big\langle \sum_{i,j} \alpha_{i,j} e_i \otimes f_j, \sum_{k,\ell} a_{k,\ell} e_k \otimes f_\ell \Big\rangle = \sum_{i,j,k,\ell} \alpha_{i,j} \alpha_{k,\ell} \langle\, e_i, e_k \,\rangle \langle\, f_j, f_\ell \,\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \alpha_{i,j} = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}^2 \geq 0$$

Außerdem gilt $\langle F, F \rangle = 0$ genau dann wenn $\alpha_{i,j} = 0$ für alle i, j gilt, d.h. $F = 0$.