Lineare Algebra 2
9. Tutorium
Normalformen quadratischer Polynome

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
15./16. Juni 2010

Lösung 1 Quadratische Polynome in mehreren Variablen

c) Eine Basis von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^3)$ ist z.B. gegeben durch die Monome

$$p_0(x) := 1\,, \quad p_1(x) := x_1\,, \quad p_2(x) := x_2\,, \quad p_3(x); = x_3\,,$$
$$p_4(x) := x_1^2\,, \quad p_5(x) := x_1x_2\,, \quad p_6(x) := x_1x_3\,, \quad p_7(x) := x_2^2\,, \quad p_8(x) := x_2x_3\,, \quad p_9(x) := x_3^2\,.$$

Für den Raum der homogenen Polynome vom Grad 2 sind $p_4, \dots, p_9$ eine Basis.

d) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass alle quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^n$ von der Form $Q(x) = x^TAx$ mit einer quadratischen Matrix sind. Durch ausmultiplizieren sieht man sofort, dass Q ein quadratisches, homogenes Polynom vom Grad 2 ist. Umgekehrt zeigen wir, dass jedes Polynom $f \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ nur dann homogen vom Grad 2, wenn es von der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1+\dots+i_n=2} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

ist. Jeder Summand $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ ist dann eine quadratische Form, und somit ist auch f eine quadratische Form. Sei also $f \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ homogen vom Grad 2, $f(x) := \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$. Wir wollen zeigen, dass alle Koeffizienten $a_{i_1,\dots,i_n}$ mit $i_1 + \dots + i_n \neq 2$ verschwinden. Weil die Polynome $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ mit $i_1 + \dots + i_n = 2$ homogen vom Grad 2 sind, können wir o.B.d.A. annehmen, dass die entsprechenden Koeffizienten Koeffizienten verschwinden, d.h. f ist o.B.d.A. von der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$. Wegen $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ gilt insbesondere $f(0) = 0$, also $a_0 = 0$. Für das Polynom $f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ gilt dann $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Wäre $f \neq 0$ widerspricht dies der Homogenität vom Grad 2 für $\lambda \neq 0, 1$. Es muss also $f = 0$ gelten.

Lösung 2 Orthogonale Äquivalenz

a) Wir zeigen, dass für jedes quadratische Polynom $f \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ auch $f \circ \varphi^{-1}$ wieder ein quadratisches Polynom ist. Hierzu reicht es sich auf ein Erzeugersystem von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ zu beschränken, d.h. können o.B.d.A. $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{i_1} \cdot x_n^{i_n}$ mit $i_1 + \dots + i_n \leq 2$ annehmen. Sei φ eine orthogonale Abbildung auf $\mathbb{R}^n$. Sei $Q = (q_{i,j})_{i,j}$ die Matrix der Inversen φ^{-1} bzgl. der Standardbasis. Dann gilt

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (q_{1,1}x_1 + \dots + q_{1,n}x_n)^{i_1} \cdot \dots \cdot (q_{n,1}x_1 + \dots + q_{n,n}x_n)^{i_n}\,.$$

Durch Ausmultiplizieren sieht man sofort, dass auch $f \circ \varphi^{-1}$ wieder ein quadratisches Polynom ist.

c) Die Polynome $f(x) = 0$ und $g(x) = 1$ sind nicht orthogonal äquivalent, in der Äquivalenzklasse von f bzw. g liegt nur f bzw. g selbst. Allgemeiner sind alle konstanten Funktionen Fixpunkte der Darstellung. Insbesondere ist auch kein konstantes Polynom zu einem nicht-konstanten Polynom orthogonal äquivalent.

d) Bis auf uniären Basiswechsel sind f, g und h die gleiche quadratische Form.

e) Wir haben bereits gezeigt, dass es sich bei den betreffenden Polynomen genau um die quadratischen Formen handelt. Sei also $f(x) = x^TAx$ eine quadratische Form mit o.B.d.A. symmetrischer Matrix A. Dann gibt es eine orthogonale Matrix Q, so dass $D := Q^TAQ$ eine Diagonalmatrix ist. Bezeichne mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Diagonaleinräge von D und setzte $\varphi(x) := Q^Tx$. Dann ist φ eine orthogonale Abbildung mit $\varphi^{-1}(x) = Qx$ und somit

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = (Qx)^TA(Qx) = x^TDx = \lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_nx_n^2\,.$$

Lösung 4 Die Gruppe der Affinitäten

a) Die Translation um den Vektor a ist eine Bijektion. Somit ist ψ genau dann bijektiv, wenn auch $\psi - a = \varphi$ bijektiv ist. Die Umkehrabbildung ist durch $\psi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(a)$ gegeben, insbesondere ist ψ^{-1} wieder eine affine Abbildung.

b) Die Gruppe der invertierbaren, linearen Abbildungen $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Auch die hier relevante Menge der orthogonalen Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Eine andere Untergruppe bilden die Isometrien von $\mathbb{R}^n$ (vgl. 5. Tutorium), insbesondere bilden die Translationen eine Untergruppe.

Lösung 5 Affine Äquivalenz

Die meisten Teilaufgaben lassen sich analog zu Aufgabe 2 bearbeiten.

d) Zur besseren Übersichtlichkeit erläutern wir hier nur die elementaren Schritte, um die gewünschte Normalform zu erhalten.

   Weil jede der Abbildungen $\varphi(x_1,\dots,x_n) := (\lambda_1 x_1,\dots,\lambda_n x_n)$ mit $\lambda_1,\dots,\lambda_n \neq 0$ in $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ liegt, erhalten wir durch Skalieren der Variablen x_i stets ein affin äquivalentes Polynom. Analog sind alle Translationen $\psi(x_1,\dots,x_n) := (x_1 + c_1,\dots,x_n + c_n)$ mit $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ in $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Durch Verschieben der Variablen x_i erhalten wir also stets ein affin äquivalentes Polynom. Ebenso erhalten wir durch Vertauschen von Variablen stets ein affin äquivalentes Polynom.

   Es gilt $x_i^2 + 2x_i x_j = (x_i + x_j)^2 - x_j^2$. Die Abbildung

$$\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) := (x_1,\dots,x_i + x_j,\dots,x_j,\dots,x_n)$$

   ist in $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Ersetzen wir $x_i + x_j$ durch x_i erhalten wir also ein affin äquivalentes Polynom. Auf diese Weise lassen sich die „gemischten" quadratischen Terme, zu denen auch ein „rein" quadratischer Term existiert, eliminieren.

   Weiter gilt $4x_i x_j = (x_i + x_j)^2 - (x_i - x_j)^2$. Weil die Abbildung

$$\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_i + x_j,\dots,x_i - x_j,\dots,x_n)$$

   in $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ liegt, erhalten wir ein affin äquivalentes Polynom, wenn wir $x_i + x_j$ durch x_i und $x_i - x_j$ durch x_j ersetzen. Auf diese Weise lassen sich (zusammen mit der vorherigen Ersetzung) alle gemischten quadratischen Terme $x_i x_j$ beseitigen.

   Weiter gilt $x_i^2 + 2ax_i = (x_i + a)^2 - a^2$. Durch Translation von x_i erhällt man ein so affin äquivalentes Polynom, in welchem x_i nur quadratisch oder nur linear auftritt.

   Insgesammt erhällt man durch all diese Umformungen ein affin äquivalentes Polynom der Form

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - \sum_{i=n_1+1}^{n_2} x_i^2 + \sum_{i=n_2+1}^{n_3} x_i + c$$

   mit $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n$ und einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Gibt es keinen linearen Term ($n_2 = n_3$), so haben wir die untere der gewünschten Formen erreicht. Gibt es einen linearen Term ($n_2 < n_3$), so erhällt man durch Tranlation von x_{n_3} um c die obere gewünschte Form.