Lineare Algebra 2
8. Tutorium
„Darstellungen von Gruppen“

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
8.–9. Juni 2010

Lösung 1 Wirkungen und Darstellungen

a) Für alle $g, h \in G, x \in V$ gilt

$$\gamma_\rho(gh, x) = \rho(gh)(x) = \rho(g)\big(\rho(h)(x)\big) = \gamma_\rho\big(g, \gamma_\rho(h, x)\big) , \qquad \gamma_\rho(1, x) = \rho(1)(x) = \mathrm{id}(x) = x ,$$

d.h. γ_ρ ist eine Wirkung. Weil $\rho(g)$ für jedes $g \in G$ eine lineare Abbildung ist, ist jede der Abbildungen $x \mapsto \gamma_\rho(g, x) = \rho(g)(x)$ mit $g \in G$ linear, d.h. γ_ρ ist eine lineare Wirkung.

b) Weil γ eine lineare Wirkung ist, ist jede der Abbildungen $\rho_\gamma(g) : x \mapsto \gamma(g, x)$ mit $g \in G$ linear. Weiter gilt für alle $g, h \in G, x \in V$

$$\rho_\gamma(gh)(x) = \gamma(gh, x) = \gamma\big(g, \gamma(h, x)\big) = \rho_\gamma(g)\big(\rho_\gamma(h)(x)\big) = \big(\rho_\gamma(g) \circ \rho_\gamma(h)\big)(x) ,$$
$$\rho_\gamma(1)(x) = \gamma(1, x) = x = \mathrm{id}(x) ,$$

also $\rho_\gamma(gh) = \rho_\gamma(g) \circ \rho_\gamma(h)$ und $\rho_\gamma(1) = \mathrm{id}$, d.h. ρ ist eine Darstellung.

c) Wir zeigen, dass die Abbildung $\rho \mapsto \gamma_\rho$ eine solche Bijektion mit Inversem $\gamma \mapsto \rho_\gamma$ ist. Hierzu zeigen wir, dass $\rho = \rho_{\gamma_\rho}$ für jede Darstellung ρ gilt und dass $\gamma = \gamma_{\rho_\gamma}$ für jede lineare Wirkung γ gilt: Für jede Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ und jedes $g \in G, x \in V$ gilt nach Konstruktion

$$\rho_{\gamma_\rho}(g)(x) = \gamma_\rho(g, x) = \rho(g)(x) ,$$

d.h. $\rho_{\gamma_\rho} = \rho$. Umgekehrt gilt für jede lineare Darstellung $\gamma : G \times V \to V$ und jedes $g \in G, x \in V$ nach Konstruktion

$$\gamma_{\rho_\gamma}(g, x) = \rho_\gamma(g)(x) = \gamma(g, x) ,$$

d.h. $\gamma_{\rho_\gamma} = \gamma$.

Lösung 2 Adjungierte Darstellung

b) Der von der Einheitsmatrix erzeugte eindimensionale Teilraum $U := \mathbb{R} \cdot E$ ist invariat, denn für alle $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt $SES^{-1} = E$.

c) Sei $Q \in O_n(\mathbb{R})$ und $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\big\langle\, \rho(Q)(A), \rho(Q)(B) \,\big\rangle = \Big\langle\, QAQ^T, QBQ^T \,\Big\rangle = \mathrm{Tr}\big((QBQ^T)^T(QAQ^T)\big) = \mathrm{Tr}(QB^TQ^TQAQ^T) = \mathrm{Tr}(QB^TAQ^T)$$
$$= \mathrm{Tr}(B^TAQ^TQ) = \mathrm{Tr}(B^TA) = \langle A, B \,\rangle .$$

d) Die Vielfachen der Einheitsmatrix sind ein nicht-trivialer, invarianter Teilraum. Ein weiterer invarianter Teilraum ist die Menge U aller symmetrischen Matrizen, denn für eine symmetrische Matrix $A \in M_n$ und $Q \in O_n(\mathbb{R})$ ist auch QAQ^T wieder symmetrisch. Analog ist auch der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen $U^\perp$ invariant.

Lösung 3 Zerlegung endlich-dimensionaler, orthogonaler Darstellungen

a) Einfach nachrechnen.

b) Man überlegt sich leicht, dass der Schnitt von invarianten, linearen Teilräumen wieder ein invarianter Teilraum ist. Der Schnitt über alle invarianten Teilräume, die v enthalten, ist somit selbst ein invarianter Teilraum, der v enthält. Nach Konstruktion ist es auch der kleinste solche Teilraum.

Sei $U \subseteq V$ der kleinste invariante Teilraum, der v enthält. Dann enthält U auch jede Vektor $\rho(g)(\mathrm{v})$ mit $g \in G$ und damit auch die lineare Hülle dieser Vektoren. Umgekehrt ist die lineare Hülle der Vektoren $\rho(g)(\mathrm{v})$ ein invarianter Teilraum, weil für jedes $h \in G$ der Vektor

$$\rho(h)\big(\rho(g)(\mathrm{v})\big) = \rho(hg)(x)$$

wieder in diesem Teilraum liegt. Weil U der kleinste invariante Teilraum ist, muss die lineare Hülle der Vektoren $\rho(g)(\mathrm{v})$ mit $g \in G$ auch U enthalten.

c) Sei $g \in G$ und $\mathrm{v} \in U^\perp$. Dann gilt für alle $w \in U$

$$\big\langle \rho(g)(\mathrm{v}), w \big\rangle = \Big\langle \mathrm{v}, \rho(g^{-1})(w) \Big\rangle = 0\,,$$

weil $\rho(g^{-1}(w)$ wieder in U liegt. Somit gilt $\rho(g)(\mathrm{v}) \in U^\perp$, d.h. $U^\perp$ ist invariant.

d) Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über die Dimension von V. Für $\dim V = 1$ ist die Behauptung trivial erfüllt, weil es keine nicht-trivialen Teilräume gibt. Sei nun $\dim V = N$ und jede orthogonale Darstellung von G auf einem Vektorraum W mit $\dim W < N$ zerfalle in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen. Ist die Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ selbst irreduzibel, ist nichts zu zeigen. Andernfalls gibt es nicht-triviale, invariante Teilräume. Wir wählen einen dieser Teilräume $U \subseteq V$. Wir haben zuvor gezeigt, dass dann auch $U^\perp$ invariant ist. Wegen $V = U \oplus U^\perp$ ist die Darstellung ρ dann die direkte Summe der eingeschränkten Darstellungen

$$\rho = \rho_U \oplus \rho_{U^\perp}\,.$$

Wegen $\dim U, \dim U^\perp < \dim V = N$ zerfallen die eingeschränkten Darstellung $\rho_U : G \to \mathrm{Aut}(U)$ und $\rho_{U^\perp} : G \to \mathrm{Aut}(U^\perp)$ in irreduzible Darstellungen

$$\rho_U = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k\,, \qquad\qquad \rho_{U^\perp} = \rho_{k+1} \oplus \cdots \oplus \rho_n\,.$$

Insgesamt zerfällt ρ also in die direkte Summe der irreduziblen Darstellungen $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

e) Für die Darstellung von $O_2(\mathbb{R})$ auf $M_2(\mathbb{R})$ haben wir schon die Vielfachen der Einheitsmatrix, die symmetrischen Matrizen und die schiefsymmetrischen Matrizen als invarianten Teilraum erkannt. Der Teilraum der schiefsymmetrischen Matrizen $U_1 \subseteq M_2(\mathbb{R})$ ist eindimensional. Die darauf eingeschränkte Darstellung ist somit irreduzibel. Diese Darstellung ist durch die Determinante gegeben:

$$\rho_1 : G \to \mathrm{Aut}(U_1), \quad \rho_1(Q)(A) = \det(Q) \cdot A\,.$$

Das orthogonale Komplement sind die symmetrischen Matrizen mit Dimension 2. Die auf $U_1^\perp$ eingeschränkte Darstellung ist jedoch nicht irreduzibel, weil die Einheitsmatrix auch symmetrisch ist. Der von der Einheitsmatrix erzeuge lineare Teilraum $U_2 = \mathbb{R}E$ ist eindimensional. Die auf U_2 eingeschränkte Darstellung ist somit irreduzibel. Diese Darstellung ist die identische Darstellung

$$\rho_2 : G \to \mathrm{Aut}(U_2), \quad \rho(Q)(A) = A\,.$$

Der Orthogonalraum von U_2 im euklidischen Raum U_1 ist die Menge U_3 aller symmetrischer Matrizen mit Spur 0, d.h. aus Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass die auf U_3 eingeschränkte Darstellung irreduzibel ist. Weil U_3 zweidimensional ist, müssen wir dazu nur zeigen, dass es keinen eindimensionalen, invarianten Teilraum gibt. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gibt einen solchen Teilraum. Sei $A \in U_3$ ein Erzeuger des Teilraumes. Dann gilt $QAQ^T = \pm A$ für jedes $Q \in O_2(\mathbb{R})$. Weil A symmetrisch ist, gibt es dann eine orthogonale Matrix $\tilde{Q} \in O_2(\mathbb{R})$, so dass $\tilde{Q}A\tilde{Q}^T$ eine Diagonalmatrix ist. Wegen $\tilde{Q}A\tilde{Q}^T = \pm A$ muss also bereits A selbst eine Diagonalmatrix sein. In U_3 gibt es jedoch bis auf Vielfache nur eine Diagonalmatrix, nämlich

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Z.B. für $Q = 1/\sqrt{2} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt jedoch nicht $QAQ^T = \pm A$. Der von A erzeugte Teilraum ist somit nicht invariant, ein Widerspruch. Die auf den zweidimensionalen Teilraum U_3 eingeschränkte Darstellung ist also irreduzibel.

Insgesamt zerfällt die Darstellung von $O_2(\mathbb{R})$ auf $M_2(\mathbb{R})$ in die direkte Summe der drei irreduziblen Darstellungen ρ_1, ρ_2 und ρ_3.

Lösung 4 Darstellungen endlicher Gruppen

a) Sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe G. Wähle $\mathrm{v} \in V$. Dann ist der von den Vektoren $\rho(g)(\mathrm{v})$ erzeugte Teilraum $U \subseteq V$ endlich-dimensional und invariant. Wegen $\mathrm{v} \in U$ folgt aus der Irreduzibilität, dass $U = V$ gelten muss.

b) Dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ ein Skalarprodukt ist, rechnet man leicht nach. (Für die Definitheit nutzt man $\langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle \leq \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle_\rho$.) Wir zeigen nur, dass die Darstellung ρ bzgl. diesem Skalarprodukt orthogonal ist. Seien hierfür $g \in G$ und $\mathrm{v}, w \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \rho(g)(\mathrm{v}), \rho(g)(w) \rangle_\rho &= \sum_{h \in G} \langle \rho(h)\big(\rho(g)(\mathrm{v})\big), \rho(h)\big(\rho(g)(w)\big) \rangle = \sum_{h \in G} \langle \rho(hg)(\mathrm{v}), \rho(hg)(w) \rangle \\ &= \sum_{h' \in G} \langle \rho(h')(\mathrm{v}), \rho(h')(w) \rangle = \langle \mathrm{v}, w \rangle_\rho , \end{aligned}$$

weil die Abbildung $G \to G$, $h \mapsto hg$ für jedes $g \in G$ eine Bijektion auf G ist.

c) Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ definieren wir eine lineare Abbildung auf der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$ durch $\varphi_\sigma(e_i) := e_{\sigma(i)}$. Die Funktion φ lässt sich dann zu einer linearen Abbildung $\varphi_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fortsetzen. Bzgl. der kanonischen Basis hat die Matrix von φ_σ jeweils in der i-ten Spalte und der $\sigma(i)$-ten Zeile eine 1, sonst Nulleinträge. Man verifiziert leicht, dass durch $\rho : S_n \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, $\rho(\sigma) := \varphi_\sigma$ eine orthogonale Darstellung von S_n auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist.

Diese Darstellung ist für $n \geq 2$ nicht irreduzibel. Z.B. ist der von dem Vektor $x = (1, \ldots, 1)^T$ aufgespannte lineare Teilraum invariant. Die Aufgabe besteht also im Wesentlichen daraus, zu zeigen, dass die Darstellung auf $\{x\}^\perp$ irreduzibel ist oder in $\{x\}^\perp$ weitere invariante Teilräume zu finden.