Lineare Algebra 2
7. Tutorium
Lösungshinweise

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
01. Juni 2010

Aufgabe 1 Orthogonale Abbildung

Wegen $||q|| = \sqrt{< q, q >} = Re(q\bar{q}) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{det(q)}$ und $\sqrt{det(A \cdot B)} = \sqrt{det(A)} \cdot \sqrt{det(B)}$ gilt

$$||qp|| = ||q|| \cdot ||p||,$$

woraus folgt:

$$||A_q(x)|| = ||qxq^{-1}|| = ||q||\ ||x||\ ||q^{-1}|| = ||x||.$$

Die Abbildung ist also isomerisch.
Zusammen mit der Linearität (Verknüpfung von linearen Abbildungen, siehe Aufgabe 5) ist die Orthogonalität gezeigt.

Durch Nachrechnen zeigt man, dass der Realteil von qxq^{-1} null ist, das heißt qxq^{-1} ist rein imaginär.

Aufgabe 2 Oktaven

a) $\mathbb{O}$ ist alternativ, das bedeutet, dass jede nur von 1 und höchstens zwei anderen Oktaven erzeugte Unteralgebra assoziativ ist.
Da für $0 \neq u \in \mathbb{O}$ das inverse Element durch $u^{-1} = \frac{\bar{u}}{|u|^2}$ gegeben ist, müssen wir zeigen, dass $\bar{u}(ux) = (\bar{u}u)x$ gilt.
Sei $u = (a, b)$ und $x = (c, d)$.

$$\begin{aligned}
\bar{u}x &= \overline{(a,b)}(c,d) = (\bar{a}, -b)(c,d) = (\bar{a}c + \bar{d}b, d\bar{a} - b\bar{c}) \\
\\
u(\bar{u}x) &= (a,b)(\bar{a}c + \bar{d}b, d\bar{a} - b\bar{c}) \\
&= (a(\bar{a}c + \bar{d}b) - (a\bar{d} - c\bar{b})b,\ (d\bar{a} - b\bar{c})a + b(\bar{c}a + \bar{b}d)) \\
&= (a(\bar{a}c) + a(\bar{d}b) - (a\bar{d})b + (c\bar{b})b,\ (d\bar{a})a + b(\bar{c}a) - (b\bar{c})a + b(\bar{b}d)) \\
\\
(u\bar{u})x &= \Big((a\bar{a})c + c(\bar{b}b), d(\bar{a}a) + (b\bar{b})d\Big)
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert, da $\mathbb{H}$ assoziativ ist:

$$u(\bar{u}x) - (u\bar{u})x = 0.$$

Damit gilt, falls $ux = w$:

$$u^{-1}w = u^{-1}(ux) = \frac{\bar{u}}{|u|^2}(ux) = (\frac{1}{|u|^2}\bar{u}u)x = x.$$

b) $\mathbb{O}$ erfüllt nicht die Assoziativität.
Bezeichnet 1, i, j, k die Standardbasis (siehe letztes Tutorium), so gilt zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
(0,1)\cdot((0,i)(0,j)) &= -(0,1)(k,0) = (0,k) \\
((0,1)(0,i))\cdot(0,j) &= (i,0)(0,j) = -(0,k).
\end{aligned}$$

c) (i)

$$\begin{aligned}
\overline{(a,b)\cdot(c,d)} &= \overline{(ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})} = (\bar{c}\bar{a} - \bar{b}d, -da - b\bar{c}) \\
\overline{(c,d)}\cdot\overline{(a,b)} &= (\bar{c}, -d)(\bar{a}, -b) = (\bar{c}\bar{a} - \bar{b}d, -b\bar{c} - da)
\end{aligned}$$

(ii)

$$(a,b)\overline{(a,b)} = (a,b)(\bar{a},-b) = (a\bar{a} + \bar{b}b, -ba + ba) = |a|^2 + |b|^2.$$

Aufgabe 3 Multiplikation

Nachrechnen!

Aufgabe 4 Vier-Quadrate-Satz

Das Produkt von zwei Quaternionen $q = \alpha \cdot 1 + \beta i + \gamma j + \delta k$ und $p = \alpha' \cdot 1 + \beta' i + \gamma' j + \delta' k$ ist

$$qp = (\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta') \cdot 1 + (\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma')i + (\alpha\gamma' - \beta\delta' + \gamma\alpha' + \delta\beta')j + (\alpha\delta' + \beta\gamma' - \gamma\beta' + \delta\alpha')k.$$

Aus der Gleichung $|q|^2|p|^2 = |qp|^2$ erhält man:

$$\begin{aligned}
&(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) \cdot ((\alpha')^2 + (\beta')^2 + (\gamma')^2 + (\delta')^2) \\
&= (\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta')^2 + (\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma')^2 + (\alpha\gamma' - \beta\delta' + \gamma\alpha' + \delta\beta')^2 + (\alpha\delta' + \beta\gamma' - \gamma\beta' + \delta\alpha')^2.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

(Der Beweis der Bemerkung ist etwas aufwändiger. Jede natürliche Zahl lässt sich in Primfaktoren zerlegen. Es genügt also zu zeigen, dass sich jede Primzahl als Summe von vier Quadratzahlen darstellen lässt.)

Aufgabe 5 Einheitsquaternionen

a) Das inverse Element $x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$ zu einem Einheitsquaternion x ist wegen $\left|\frac{\bar{x}}{|x|^2}\right| = |\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}x} = 1$ auch ein Einheitsquaternion.
Wegen $|xy| = |x| \cdot |y| = 1$ ist die Multiplikation von zwei Einheitsquaternionen x und y auch wieder ein Einheitsquaternion.
Assoziativität und Existenz des neutralen Elements sind klar!

b) Überlegen Sie sich, dass für je zwei Elemente $p, q \in \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ sowohl ihre multiplikative Verknüpfung $p \cdot q$ als auch das inverse Element $q^{-1} = \bar{q}$ wieder in $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ liegt.

c) Das Einheitsquaternion in der Matrixdarstellung ist

$$\frac{x}{|x|} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 i & -x_2 + x_3 i \\ x_2 + x_3 i & x_0 - x_1 i \end{pmatrix}$$

Dass ihre Determinante 1 ist, folgt direkt aus $1 = \left|\frac{x}{|x|}\right|^2 = \det(\frac{x}{|x|})$.
Außerdem gilt:

$$\frac{1}{|x|} \begin{pmatrix} x_0 + x_1 i & -x_2 + x_3 i \\ x_2 + x_3 i & x_0 - x_1 i \end{pmatrix}^* = \frac{1}{|x|} \begin{pmatrix} x_0 - x_1 i & x_2 - x_3 i \\ -x_2 - x_3 i & x_0 + x_1 i \end{pmatrix} = \frac{x_0}{|x|} - \frac{x_1}{|x|} i - \frac{x_2}{|x|} j - \frac{x_3}{|x|} k = \frac{\bar{x}}{|x|} = \left(\frac{x}{|x|}\right)^{-1}.$$

Die Einheitsquaternionen sind also unitäre Matrizen.