Lineare Algebra 2
6. Tutorium
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
18. Mai 2010

Aufgabe 1: Quaternionen

(K1) $\mathbb{H}$ zusammen mit der Addition $+$ ist eine abelsche Gruppe:

(i) Assoziativität ist klar (sh. Hinweis)!

(ii) Neutralelement ist die Nullmatrix.

(iii) Inverses Element zu A ist -A.

(iv) Kommutativität ist klar (sh. Hinweis)!

(K2) Bezeichnet $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \backslash \{0\}$: für A,B $\in \mathbb{H}^*$ gilt auch $AB \in \mathbb{H}^*$.
$\mathbb{H}$ zusammen mit der Multiplikation $\cdot$ ist eine Gruppe:

(i) Assoziativität ist klar (sh. Hinweis)!

(ii) Neutralelement ist die Einheitsmatrix

(iii) Inverses Element ist

$$A^{-1} = \frac{1}{a\bar{a} + b\bar{b}} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$$

(iv) Die Kommutativität der Multiplikation ist nicht erfüllt, wie man leicht nachrechnet.

(K3) Distributivgesetz ist klar (sh. Hinweis)!

Aufgabe 2: Identifizierung mit $\mathbb{R}^4$

Jedes Quaternion $q \in \mathbb{H}$ lässt sich in der Form

$$\alpha \cdot 1 + \beta I + \gamma J + \delta K$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ schreiben mit

$$1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I := \begin{pmatrix} i_{\mathbb{C}} & 0 \\ 0 & -i_{\mathbb{C}} \end{pmatrix},\ J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K := \begin{pmatrix} 0 & i_{\mathbb{C}} \\ i_{\mathbb{C}} & 0 \end{pmatrix}$$

Wie man leicht nachrechnet gelten für I, J und K die Hamilton-Regeln:

$$I^2 = J^2 = K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } IJ = -JI = K,\ JK = -KJ = I,\ KI = -IK = J.$$

Aufgabe 3: Eigenschaften der quaternionalen Konjugation

(i) Klar!

(ii) Klar!

(iii) Das Produkt von zwei Quaternionen $q = \alpha \cdot 1 + \beta i + \gamma j + \delta k$ und $p = \alpha' \cdot 1 + \beta' i + \gamma' j + \delta' k$ ist

$$qp = (\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta') \cdot 1 + (\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma')i + (\alpha\gamma' - \beta\delta' + \gamma\alpha' + \delta\beta')j + (\alpha\delta' + \beta\gamma' - \gamma\beta' + \delta\alpha')k.$$

Durch Nachrechnen zeigt man:

$$\begin{aligned} \bar{qp} &= (\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta') \cdot 1 - (\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma')\, i - (\alpha\gamma' - \beta\delta' + \gamma\alpha' + \delta\beta')\, j \\ &\quad -(\alpha\delta' + \beta\gamma' - \gamma\beta' + \delta\alpha')\, k \\ &= \bar{p} \cdot \bar{q}. \end{aligned}$$

(iv) Nachrechen unter Verwendung von (iii).

Aufgabe 4: Skalarprodukt

Verwenden Sie Aufgabe 3 (iii), bzw. $Re(p\bar{q}) = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'$, um die Bilinearität, Symmetrie und positive Definitheit zu zeigen.

Aufgabe 5: Multiplikation

a) Linearität:

$$\begin{aligned} R_q(x+y) &= (x+y)q = xq + yq = R_q(x) + R_q(y) \\ R_q(\lambda x) &= (\lambda x)q = \lambda R_q(x) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Orthogonalität:
Eine lineare Abbildung $V \to V$ ist orthogonal, wenn sie bijektiv und isometrisch ist (vgl. Neeb Def. 8.5.1).
Zur Bijektivität: $R_q^{-1} = R_{q^{-1}}$.
Zur Isometrie:

$$\begin{aligned} < R_q(x), R_q(y) > &= < xq, yq >= Re(xq\bar{yq}) = Re(xq\bar{q}\bar{y}) = Re(x(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)\bar{y}) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) < x, y > \end{aligned}$$

Falls $||q|| = 1$, gilt:

$$1 = ||q||^2 =< q, q >= Re(q\bar{q}) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$

was die Behauptung zeigt.

Analog für die Linksmultiplikation L_q.

Aufgabe 6: Orthogonale Abbildung

Wegen $||q|| = \sqrt{< q, q >} = Re(q\bar{q}) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{det(q)}$ und $\sqrt{det(A \cdot B)} = \sqrt{det(A)} \cdot \sqrt{det(B)}$ gilt

$$||qp|| = ||q|| \cdot ||p||,$$

woraus folgt:

$$||A_q(x)|| = ||qxq^{-1}|| = ||q||\ ||x||\ ||q^{-1}|| = ||x||.$$

Die Abbildung ist also isomerisch.
Zusammen mit der Linearität (Verknüpfung von linearen Abbildungen, siehe Aufgabe 5) ist die Orthogonalität gezeigt.

Durch Nachrechnen zeigt man, dass der Realteil von qxq^{-1} null ist, das heißt qxq^{-1} ist rein imaginär.