Lineare Algebra 2
5. Tutorium
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
18. Mai 2010

Aufgabe 1: Lineare Isometrie

Für lineare Abbildungen gilt: $\varphi(0) = 0$.
Daraus folgt $||\varphi(x)|| = ||x||$.

Es gelte: $||\varphi(x)|| = ||x||$.
Dann folgt: $d\left(\varphi(x), \varphi(y)\right) = ||\varphi(x-y)|| = ||x-y||$.

Aufgabe 2: Rotationen

Anschaulich klar, da durch die Matrix die Rotation gegen den Uhrzeigersinn mit dem Winkel t beschrieben wird.
Mathematisch: Nachrechnen, dass $||Ax||_2 = ||x||_2$.

Aufgabe 3: Translationen

$d\left(T_v(x), T_v(y)\right) = ||x-y|| = d\left(x, y\right)$.

Aufgabe 4: Isometrie mit Fixpunkt

(i) Zu zeigen: $F(\alpha x) = \alpha F(x)$.
Klar für $\alpha = 0$ oder $x = 0$. Seien also $\alpha \neq 0$ und $x \neq 0$.
Es gilt: $||F(\alpha x)|| = ||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x|| = |\alpha| \cdot ||F(x)||$.
Da Isometrien, die den Nullpunkt festhalten, winkeltreu sind, ergibt sich
für $\alpha > 0:$ $\quad w(F(x), F(\alpha x)) = 0$ und damit $F(\alpha x) = |\alpha| \cdot F(x) = \alpha F(x)$ und
für $\alpha < 0:$ $\quad w(F(x), F(\alpha x)) = \pi$ und damit $F(\alpha x) = -|\alpha| \cdot F(x) = \alpha F(x)$.

(ii) Zu zeigen: F(x+y)=F(x)+F(y).
Klar für x=0 oder y=0. Seien also $x \neq 0$ und $y \neq 0$.
Die Punkte 0, x, x+y und y bilden ein Parallelogramm im $\mathbb{R}^n$.
Als Isometrie ist F winkeltreu und wegen $F(0) = 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:$||F(x)|| = d\left(F(x), F(0)\right) = d\left(x, 0\right) = ||x||$.
Also ist F auch längentreu und es folgt unmittelbar, dass auch die Punkte 0, F(x), F(x+y) und F(y) ein Parallelogramm bilden.
Dann muss gelten: $F(x) + F(y) = F(x+y)$.

Aufgabe 5: Eigenschaften von Isometrien

a) Seien g und h Isometrien. Dann gilt:
$$d(f(x), f(y)) = d(g(h(x)), g(h(y))) = d(h(x), h(y)) = d(x, y).$$

b) Sei f eine Isometrie und es gelte f(x)=f(y).
Dann gilt: $0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, was $x = y$ impliziert.

c) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie mit $F(0) = 0$. Nach Aufgabe 4 und 5 b) ist F auch linear und injektiv.
Aus der Linearen Algebra I ist bekannt, dass injektive Endomorphismen in endlich dimensionalen Räumen nach der Dimensionsformel stets auch surjektiv sind.
(denn: f injektiv $\Leftrightarrow \ker(f) = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(f) = n \Leftrightarrow$ f surjektiv.)

d) Setze v=F(0) und definiere $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $\varphi(x) = F(x) - v$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist φ eine Isometrie und es gilt $\varphi(0) = 0$. Nach Aufgabe 4 ist φ linear.

Aufgabe 6*: Zusatzaufgabe

a) Wurde schon im letzten Semester gezeigt.

b) (i) Neutralelement: (E,0)

(ii) Inverse: $\left(A^{-1}, -A^{-1}(\mathsf{v})\right)$

(iii) Assoziativität:
$(A, \mathsf{v}) \cdot ((B, w) \cdot (C, z)) = (A, \mathsf{v}) \cdot (BC, B(z) + w) = (ABC, AB(z) + A(w) + \mathsf{v})$.
$((A, \mathsf{v}) \cdot (B, w)) \cdot (C, z) = (AB, A(w) + \mathsf{v}) \cdot (C, z) = (ABC, AB(z) + A(w) + \mathsf{v})$.