Lineare Algebra 2
4. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
11. Mai 2010

Hinweis

Dies ist nur eine Lösungsskizze. Wenn Sie Fragen zu den Aufgaben haben, kommen Sie bitte in die angebotenen Sprechstunden.

Aufgabe 1 Äquivalenz von Normen

a) Man muss die Eigenschaften der Norm nachprüfen. Der schwierige Teil ist zu zeigen, dass $||\cdot||_2$ die Dreiecksungleichung erfüllt. Dafür können Sie wie folgt vorgehen:

   i) Zeigen Sie, dass für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
   $$x \cdot y \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$
   ii) Beweisen Sie die sogenannte Cauchy-Schwarz-Ungleichung (für endliche Summen):
   $$\forall x_i, y_i \in \mathbb{C}: \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
   Setzen Sie $\alpha := \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$, $\beta := \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2$. Teilen Sie die zu beweisende Ungleichung durch $\sqrt{\alpha\beta}$. Gruppieren Sie die Faktoren der einzelnen Summanden geschickt um und wenden Sie Teil (i) an.
   iii) Beweisen Sie die sogenannte Minkowski-Ungleichung (für endliche Summen):
   $$\forall x_i, y_i \in \mathbb{C}: \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
   Beginnen Sie mit der quadrierten linken Seite. Zerlegen Sie jeweils einen Faktor jedes Summanden mit der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen ($|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$). Wenden Sie dann Teil (ii) an.

b) Klar!

c) Es gilt $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^p} = \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty$ und $\|x\|_\infty^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$ bzw. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$. Somit sind alle p-Normen zur Maximumsnorm äquivalent. Insbesondere sind damit auch alle p-Normen äquivalent.

Aufgabe 2 Norm und Skalarprodukt

Dass $||\cdot||_\infty$ eine Norm ist, wurde bereits in Aufgabe 1 gezeigt.

Nehmen wir an, es existiert ein Skalarprodukt mit $||x||_\infty = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $n \geq 2$ gilt.
Nach Aufgabe (G4.1) der Analysis-Vorlesung gilt dann die Parallelogramm-Gleichung $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.
Jedoch ist für
$$x = (1, 1, 0, \cdots, 0) \quad \text{und} \quad y = (1, -1, 0, \cdots, 0)$$
gerade
$$||x + y||_\infty^2 + ||x - y||_\infty^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \neq 4 = 2 + 2 = 2||x||_\infty^2 + 2||y||_\infty^2.$$
Daher kann es kein solches Skalarprodukt geben.

Aufgabe 3 Skalarprodukt und Winkel

a) 1. Seien $A,B,C \in M_n(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) zu ($B_{1,2}$): Da tr $(A+B) =$ tr $(A) +$ tr (B) und tr $(\lambda A) = \lambda$tr (A), folgt

$$\begin{aligned} \langle \lambda A + B, C\rangle &= tr\ (C^T(\lambda A + B)) \\ &= tr\ (C^T(\lambda A) + C^T B) \\ &= \lambda tr\ (C^T A) + tr\ (C^T B) \\ &= \lambda\langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle. \end{aligned}$$

ii) zu (S): Da tr $(A^T) =$ tr (A) und $(A^T B)^T = B^T A^{T^T} = B^T A$, folgt

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}(A^T B) = \langle B, A\rangle.$$

iii) zu (P): Es ist

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{lk}^2 \geq 0.$$

Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn $A = 0$.

2. Es gilt:

$$\begin{aligned} ||E_2|| &= \sqrt{\langle E_2, E_2\rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(E_2^T E_2)} = \sqrt{2}, \\ ||A|| &= \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)} = \sqrt{30}, \end{aligned}$$

also ist

$$\cos\alpha = \frac{\langle E_2, A\rangle}{||E_2|| \cdot ||A||} = \frac{5}{\sqrt{60}}.$$

Damit erhalten wir den Winkel $\alpha = 49,8^\circ$ (gerundet).

3. Sei $B \in M_n(\mathbb{R})$.

$$B \perp E \Leftrightarrow \langle B, E\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}(B) = 0.$$

b) analog zu a)

Aufgabe 4

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} ||u|| = ||v|| &\Leftrightarrow ||u||^2 = ||v||^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x + y, x - y\rangle = 0. \end{aligned}$$

b) Aus

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

folgt

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y\rangle = 0.$$

Für unitäre Vektorräume gelten diese Äquivalenzen nicht. Wählt man $V := \mathbb{C}, x := i, y := 1$, so erhält man ein Gegenbeispiel zu a), für b) ist $V := \mathbb{C}^2, x := (i,i), y := (1,1)$ ein solches.