Lineare Algebra 2
3. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Fachbereich Mathematik
4. Mai 2010

Lösung 1 Beispielklassen

Lösung 1.1 Lineare Wirkungen

Es gibt zwei Bahnen dieser Wirkung: $\{0\}$ und $V \setminus \{0\}$.

Lösung 1.2 Translationen

Für je zwei Elemente $h_1, h_2 \in G$ gilt $(h_2 h_1^{-1}).h_1 = h_2 h_1^{-1} h_1 = h_2$. Die Wirkung ist also transitiv.

Ist $g \in G$ ein Element der Standgruppe G_h eines Elementes $h \in G$, so gilt $gh = g.h = h$. Durch Multiplikation von rechts mit h^{-1} folgt daraus $g = 1$.

Lösung 1.3 Basistransformation

Die Bahnen dieser Wirkungen heißen Ähnlichkeitsklassen. Zwei Endomorphismen $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ bzw. zwei Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ liegen genau dann in einer Bahn, wenn φ und ψ bzw. A und B zueinander ähnlich sind.

Die Wirkung ist nicht transitiv, weil die Bahn der Nullabbildung bzw. der Nullmatrix nur aus der Nullabbildung bzw. Nullmatrix besteht.

Lösung 2 Bahngleichung

c) Die Abbildung $f : [1] \to [g]$, $h \mapsto gh$ ist tatsächlich wohldefiniert, weil aus $h.x = x$ auch $(gh).x = g.(h.x) = g.x$ folgt. Völlig analog ist die Abbildung $g : [g] \to [1]$, $h \mapsto g^{-1}h$ wohldefiniert. Man sieht sofort, dass f und g zueinander inverse Abbildungen sind.

d) Wir müssen zeigen, dass das Element $g.x$ nicht von der Wahl des Repräsentanten g von $[g]$ abhängt. Für $\tilde{g} \in [g]$ gilt aber bereits $g.x = \tilde{g}.x$ nach Konstruktion von $\sim$. Die Abbildung ist also wohldefiniert.

   Weiter ist die Abbildung injektiv, denn $g_1.x = g_2.x$ heißt nach Konstruktion $g_1 \sim g_2$, also $[g_1] = [g_2]$.

   Die Abbildung ist auch trivialerweise surjektiv, denn für jedes Element y in der Bahn $G.x$ gibt es ein Element $g \in G$ mit $g.x = y$.

e) Weil $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, bilden die Äquivalenzklassen eine Partition der Menge G, d.h. G ist die disjunkte Vereinigung aller (endlich vielen) Äquivalenzklassen

$$G = [g_1] \cup [g_2] \cup \cdots \cup [g_n]$$

   mit Elementen $g_1, \ldots, g_n \in G$ mit $[g_i] \cap [g_j] = \emptyset$ für alle $i \neq j$. Die Zahl n ist dabei die Anzahl der verschiedenen Äquivalenzklassen. Für die Anzahl der Elemente gilt also

$$|G| = \left|[g_1]\right| + \cdots + \left|[g_n]\right| .$$

   Wir haben gezeigt, dass jede Äquivalenzklasse genau so viele Elemente wie die Standgruppe G_x hat, d.h. $\left|[g_1]\right| = \cdots = \left|[g_n]\right| = \left|G_x\right|$. Weiter haben wir gezeigt, dass die Anzahl der Äquivalenzklassen n gleich der Anzahl der Elemente der Bahn von x ist, d.h. $n = |G.x|$. Zusammen folgt

$$|G| = \left|[g_1]\right| + \cdots + \left|[g_n]\right| = n \cdot \left|G_x\right| = |G.x| \cdot \left|G_x\right| .$$

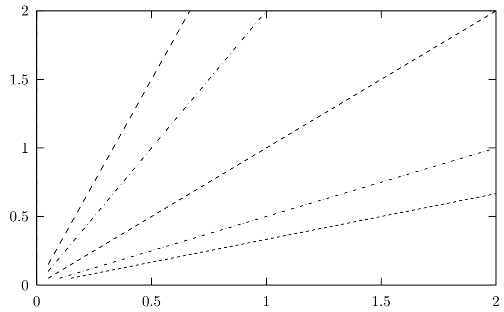

Abbildung 1: Bahnen von γ_1

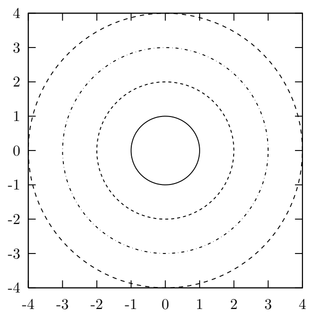

Abbildung 2: Bahnen von γ_i

Lösung 3 Konkrete Beispiele

a) Die Bahn der Null $0 \in \mathbb{C}$ besteht nur aus Null selbst. Für jeden anderen Punkt $0 \neq z \in \mathbb{C}$ besteht die Bahn aus dem Strahl ohne Null, der von Null aus durch den Punkt z geht. Siehe Abbildung 1.

   Die Standgruppe von $0 \in \mathbb{C}$ besteht aus ganz $\mathbb{R}$. Für jeden anderen Punkt $0 \neq z \in \mathbb{C}$ besteht die Standgruppe nur aus $1 \in \mathbb{R}$.

b) Die Bahn eines Punktes $z \in \mathbb{C}$ ist der Kreis im Komplexen, auf dem z liegt, d.h. der Kreis mit Radius $|z|$. Siehe Abbildung 2.

c) Für rein reelles und rein imaginäre λ haben wir die Wirkung bereits untersucht. Wir betrachten deshalb hier komplexe λ mit nicht verschwindendem Real- und Imaginärteil. Durch Multiplikation mit $1/z$ reicht es auch, sich die Bahnen für $z = 1$ klarzumachen. Die Bahn der Null besteht (wieder) nur aus der Null selbst. Die Bahn eines Punktes $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ist eine Spirale vom Null-Punkt ausgehend (ohne Null selbst) durch den Punkt z. In Abbildung 3 sind die Bahnen von $z = 1$ für verschiedene Werte von λ zu sehen.

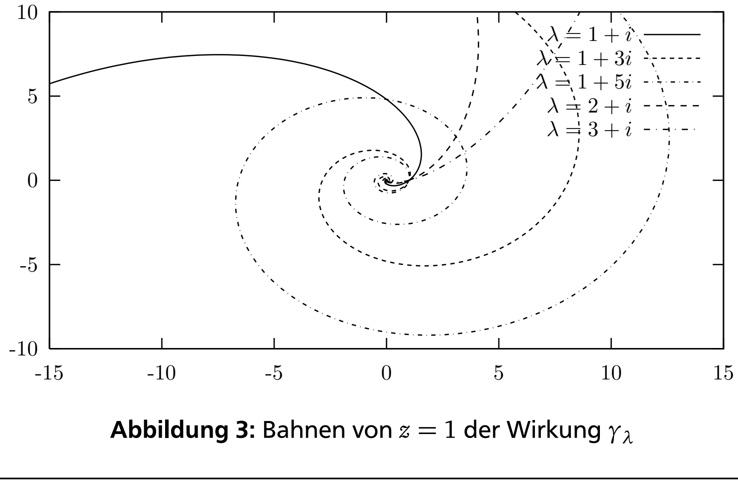

Abbildung 3: Bahnen von $z = 1$ der Wirkung γ_λ