Lineare Algebra 2
2. Tutorium

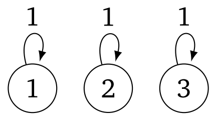
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

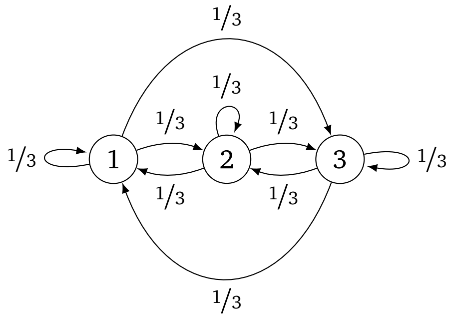
Fachbereich Mathematik
27. April 2010

Lösung 2 Übergangsgraphen

a) Für T_1:



Für T_2:



b)

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 3

a) Sei zuerst $T = (t_{i,j})$ eine stochastische Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$ ein W-Vektor. Setze $y := Tx$. Da alle Einträge von x und von T positiv sind, ist auch jeder Eintrag $y_i = \sum_j t_{ij} x_j$ positiv. Außerdem gilt

$$\sum_i y_i = \sum_i \sum_j t_{ij} x_j = \sum_j x_j \sum_i t_{ij} = \sum_j x_j \cdot 1 = 1\,,$$

weil die sowohl die Spaltensummen von T als auch die Summe der Einträge von x jeweils 1 ist.

Sei nun umgekehrt T eine Matrix, so dass für jeden W-Vektor x auch Tx wieder ein W-Vektor ist. Dies gilt insbesondere für die W-Vektoren $e_1, \dots, e_n$, d.h. die Spalten $Te_1, \dots, Te_n$ sind W-Vektoren. Also ist T eine stochastische Matrix.

b) Es gilt

$$t_{i,j}^{(n)} = \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} t_{i,i_{n-1}} \cdot \dots \cdot t_{i_2,i_1} \cdot t_{i_1,j} \; .$$

Der Summand $t_{i,i_{n-1}} \dots t_{i_2,i_1} \cdot t_{i_1,j}$ lässt sich interpretieren als Wahrscheinlichkeit vom Zustand j in den Zustand s_{i_1}, danach in s_{i_2}, danach in s_{i_3} usw. in den Zustand $s_{i_{n-1}}$ und schließlich nach s_i übergeht. In diesem Sinne entspricht der Summand dem Pfad $s_j, s_{i_1}, \dots, s_{i_{n-1}}, s_i$.

Lösung 4 Der PageRank

Die Übergangsmatrix zu dem angegebenen Netzwerk ist

$$T = p \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} + (1-p) \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 7 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Der invariante W-Vektor ist $x = \frac{1}{30}(4, 17, 9)^T$.

Lösung 5 Invariante Wahrscheinlichkeitsvektoren

a) Der Vektor $(1, \dots, 1)$ ist ein Linkseigenvektor von T, d.h. dür die transponierte Matrix ist $(1, \dots, 1)^T$ ein Eigenvektor. Damit hat die Transponierte und somit auch T den Eigenwert 1.

b) Wegen $Tx = x$ gilt

$$\delta = (Tx)_1 - (Tx)_2 = t_{11}x_1 + t_{12}x_2 - t_{21}x_1 - t_{22}x_2 = (t_{11} - t_{21})x_1 - (t_{22} - t_{12})x_2 \; .$$

Weil T stochastisch ist, liegen die Differenzen $t_{11} - t_{21}$ und $t_{22} - t_{12}$ zwischen -1 und 1. Würde $t_{12} > 0$ gelten, so folgt sogar $-1 < t_{22} - t_{12} < 1$ und somit

$$\delta < (t_{11} - t_{21})x_1 - x_2 \leq x_1 - x_2 = \delta \; ,$$

ein Widerspruch. Also muss $t_{12} = 0$ gelte.

c) Die Beweisführung ist verläuft analog zu 2, indem man die Differenz $\delta = \sum_{i \leq k} x_i - \sum_{i>k} x_i = \sum_{i \leq k} (Tx)_i - \sum_{i>k} (Tx)_i$ ordnet und geeignet abschätzt.

d) Nach 1 gibt es einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $Tx = x$. Wir können wieder o.B.d.A. $x_1, \dots, x_k \geq 0 > x_{k+1}, \dots, x_n$ annehmen. Setze $y := (|x_1|, \dots, |x_n|)^T$. Für alle $i \leq k$ mit gilt dann nach 2 $t_{ij} = 0$ für alle $j > k$ und somit

$$(Ty)_i = \sum_j t_{ij} |x_j| = \sum_{j \leq k} t_{ij} |x_j| = \sum_{j \leq k} t_{ij} x_j = \sum_j t_{ij} x_j \overset{Tx=x}{=} x_i = y_i \; .$$

Da auch $T(-x) = (-x)$ gilt und $(-x)$ den gleichen Betragsvektor y liefert, folgt analog $(Ty)_i = y_i$ für alle $i > k$, d.h. insgesammt $Ty = y$.