Lineare Algebra 2
1. Tutorium
Lösungshinweise

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
20. April 2010

Lösung 1 Polynome von Matrizen

$$p(B) = \begin{pmatrix} p(1) & & \\ & p(2) & \\ & & p(2) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Lösung 2

Der Raum $M_n(\mathbb{K})$ ist n^2-dimensional. Die Vektoren $E = A^0, A, A^2, \dots, A^{n^2}$ müssen somit linear abhängig sein, d.h. es gibt Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0$.

Lösung 3 Elementare Eigenschaften

a) Für $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ gilt

$$p(SAS^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (SAS^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n} a_k S A^k S^{-1} = S\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\Big) S^{-1} = S p(A) S^{-1} \,.$$

b) Alle drei Gleichungen lassen sich leicht direkt durch Berechnung der Koeffizienten der entspr. Polynome zeigen.

Alternativ: Die ersten beiden Gleichungen sind linear auf $\mathbb{K}[t] \oplus \mathbb{K}[t]$ bzw. $\mathbb{K}[t]$, die letzte Gleichung ist bilinear. Somit genügt es, beide Gleichungen auf den Erzeugern von $\mathbb{K}[t]$ nachzuweisen. Für $p(t) = t^n$ und $q(t) = t^m$ gilt die Gleichheit dann trivialerweise.

Lösung 4 Funktionen von Matrizen

a)

$$\text{Für } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{setze} \qquad f(D) := \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \,.$$

Für SDS^{-1} setze $f(SDS^{-1}) := Sf(D)S^{-1}$.

Natürlich muss bei dieser Wahl gezeigt werden, dass $f(A)$ für diese Fälle auch wohldefiniert ist. Genauer muss gezeigt werden, dass für zwei Diagonalmatrizen $D_1, D_2 \in M_n(\mathbb{R})$ und zwei invertierbare Matrizen $S_1, S_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $S_1 D_1 S_1^{-1} = S_2 D_2 S_2^{-1}$ auch gilt:

$$f(S_1 D_1 S_1^{-1}) = f(S_2 D_2 S_2^{-1}) \,.$$

b) Setzte $f(A) := A^{-1}$.

c) Ist λ kein Eigenwert von A, so ist $A - \lambda E$ invertierbar und wir können $f(A) := (A - \lambda E)^{-1}$ setzten.