Logik-Kalküle

syntaktische Beweiskalküle

Beweise der	Unerfüllbarkeit	bzw. der	Allgemeingültigkeit
	Resolution		Sequenzenkalkül

vergleiche Kalküle für AL

Resolution

Widerlegungskalkül: Unerfüllbarkeitsbeweise

wir behandeln: **Grundinstanzen-Resolution (GI-Resolution)**

Gegenstand: $\mathrm{FO}^{\neq}$-Klauselmengen K
(universelle $\mathrm{FO}^{\neq}$-Satzmengen Φ)

Beweisziel: Ableitung der (unerfüllbaren) leeren Klausel $\Box$

Korrektheit: $\Box$ ableitbar aus $K \Rightarrow K$ unerfüllbar.

Vollständigkeit: K unerfüllbar $\Rightarrow \Box$ ableitbar aus K.

FO-Klauselmengen

$\longrightarrow$ Abschnitt 5.1

universelle (skolemisierte) $\mathrm{FO}^{\neq}$-Sätze in Klauselform:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k\, \xi \;\equiv\; \forall x_1 \ldots \forall x_k \underbrace{\bigwedge_{C \in K} \bigvee C}_{\text{q-fr. Kern in KNF}}$$

$\xi \equiv K$ für endliche Klauselmenge K über $\mathrm{FO}^{\neq}$-Literalen

Terminologie

$\mathrm{FO}^{\neq}$-**Literale:**
relationale Atome oder negierte relationale Atome λ, $\overline{\lambda} \equiv \neg\lambda$

$\mathrm{FO}^{\neq}$-**Klauseln:**
endliche Mengen C von $\mathrm{FO}^{\neq}$-Literalen
für $C = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$: $C \equiv \bigvee C = \bigvee_{i=1,\ldots,k} \lambda_i$

$\mathrm{FO}^{\neq}$-**Klauselmengen:**
Mengen K von $\mathrm{FO}^{\neq}$-Klauseln

Klauselmengen und universell-pränexe Sätze

semantisch identifiziere Klauselmenge mit Satzmenge:

$$K \;\equiv\; \Big\{ \underbrace{\forall x_1 \ldots \forall x_n}_{\text{alle Variablen in } C} \bigvee C \;:\; C \in K \Big\}$$

$$\Big(\;\equiv\; \underbrace{\forall x_1 \ldots \forall x_n}_{\text{alle Variablen in } K} \bigwedge\nolimits_{C \in K} \bigvee C \qquad \text{für endliches } K \;\Big)$$

Korrespondenzen:

endliche $\mathrm{FO}^{\neq}$ Klauselmengen	$\leftrightsquigarrow$	universell-pränexe $\mathrm{FO}^{\neq}$-Sätze
$\mathrm{FO}^{\neq}$ Klauselmengen	$\leftrightsquigarrow$	universell-pränexe $\mathrm{FO}^{\neq}$-Satzmengen

Übersetzungs-Beispiel

$\varphi = \forall x \forall y \big(Rxy \rightarrow (Qx \leftrightarrow \neg Qy)\big)$
relevante Atome: $\alpha = Rxy$, $\beta_1 = Qx$ und $\beta_2 = Qy$
$\varphi = \forall x \forall y \big(\alpha \rightarrow (\beta_1 \leftrightarrow \neg\beta_2)\big)$

Kern von φ in KNF (z.B.):

$$\underbrace{(\neg\alpha \vee \beta_1 \vee \neg\beta_1)}_{\equiv 1} \;\wedge\; (\neg\alpha \vee \beta_1 \vee \beta_2)$$
$$\wedge\; (\neg\alpha \vee \neg\beta_2 \vee \neg\beta_1) \;\wedge\; \underbrace{(\neg\alpha \vee \neg\beta_2 \vee \beta_2)}_{\equiv 1}$$

liefert $K = \big\{\{\neg\alpha, \beta_1, \beta_2\}, \{\neg\alpha, \neg\beta_1, \neg\beta_2\}\big\}$
$\quad = \big\{\{\neg Rxy, Qx, Qy\}, \{\neg Rxy, \neg Qy, \neg Qx\}\big\}$

Grundinstanzen-Resolution (GI) $\longrightarrow$ Abschnitt 5.2

Idee: Übertragung von AL-Resolution gemäß Reduktionsansatz
ähnlich wie schon für andere Erfüllbarkeitsargumente

Grundinstanzen einer Klausel C über Literalen $\lambda \in \mathrm{FO}^{\neq}_{n}$:

$$C(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n) := \{\lambda(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n) \colon \lambda \in C\}$$

mit $t_i \in T_0(S)$

Grundinstanzenmenge einer Klauselmenge K:

$$\mathrm{GI}(K) := \big\{C(t_1/x_1, \dots) \colon C \in K, t_i \in T_0(S)\big\}$$

- es gilt $K \models \mathrm{GI}(K)$.

und aus dem Satz von Herbrand:

- K und $\mathrm{GI}(K)$ *erfüllbarkeitsäquivalent*.

GI-Resolution: Resolventen

C_1, C_2, C Klauseln von variablenfreien $\mathrm{FO}^{\neq}(S)$-Literalen

C ist *Resolvente* von C_1 und C_2
(bezüglich des Literals λ), wenn

$$\lambda \in C_1, \quad \overline{\lambda} \in C_2, \quad \text{und } C = (C_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{\lambda}\})$$

$$\begin{tikzcd}
C_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \underline{\lambda}\} \arrow[dr] & & C_2 = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_\ell, \underline{\overline{\lambda}}\} \arrow[dl] \\
& C = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda'_1, \dots, \lambda'_\ell\} &
\end{tikzcd}$$

zu Klauselmenge K über variablenfreien $\mathrm{FO}^{\neq}(S)$-Literalen:

$$\mathrm{Res}^*(K) = \text{Abschluß von } K \text{ unter Resolventenbildung}$$

Beispiel

über Grundinstanzen von
$\{\neg Rxy, Qx, Qy\}$, $\{\neg Rxy, \neg Qx, \neg Qy\}$ und $\{Rxx, Rxffx\}$:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg Rcc, \underline{Qc}\} \arrow[dr] & & \{\neg Rcc, \underline{\neg Qc}\} \arrow[dl] & \\
& \{\underline{\neg Rcc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{Rcc}, Rcffc\} \arrow[dl] \\
& & \{Rcffc\} &
\end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{c}
\forall x \forall y \big(\neg Rxy \vee Qx \vee Qy\big) \\
\forall x \forall y \big(\neg Rxy \vee \neg Qx \vee \neg Qy\big) \\
\forall x \big(Rxx \vee Rxffx\big)
\end{array}\right\} \models Rcffc$$

GI-Resolution: Resolutionssatz (Satz 5.7)

Korrektheit und *Vollständigkeit* von GI-Resolution
für die Unerfüllbarkeit von universell-pränexen $\mathrm{FO}^{\neq}(S)$-Satzmengen in Klauselform

Resolutionssatz

Für $\mathrm{FO}^{\neq}(S)$-Klauselmengen K sind äquivalent:

(i) K unerfüllbar.

(ii) $\mathrm{GI}(K)$ unerfüllbar.

(iii) $\Box \in \mathrm{Res}^*(\mathrm{GI}(K))$.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*: $C \in \mathrm{Res}^*(\mathrm{GI}(K))$ impliziert, dass $K \models C$
$\Box \equiv 0$ unerfüllbar.

(i) $\Leftrightarrow$ *(ii)*: Erfüllbarkeitsäquivalenz (Herbrand).

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Vollständigkeit von AL Resolution + Reduktion.

allgemeinere Resolution → Abschnitt 5.3

Idee: nicht notwendig zu Grundinstanzen absteigen
Resolution nach Substitution von Termen mit Variablen

Substitutionsinstanz zu $\sigma = (t_1, \dots, t_n) \in T(S)^n$:
$C^\sigma = \{\lambda^\sigma \colon \lambda \in C\} = \{\lambda(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n) \colon \lambda \in C\}$

Resolution von C_1 und C_2 zu C falls für geeignete σ_1 und σ_2:
$\lambda \in C_1^{\sigma_1}, \overline{\lambda} \in C_2^{\sigma_2}, C = (C_1^{\sigma_1} \setminus \{\lambda\}) \cup (C_2^{\sigma_2} \setminus \{\overline{\lambda}\})$

allgemeinere Resolution: Beispiel

$$\begin{tikzcd}
\{\neg Rxy, Qx, Qy\} \arrow[d, "y \mapsto x"] & & \{\neg Rxy, \neg Qx, \neg Qy\} \arrow[d, "y \mapsto x"] & \{Rxx, Rxffx\} \arrow[dd] \\
\{\neg Rxx, \underline{Qx}\} \arrow[dr] & & \{\neg Rxx, \underline{\neg Qx}\} \arrow[dl] & \\
& \{\underline{\neg Rxx}\} \arrow[dr] & & \{\underline{Rxx}, Rxffx\} \arrow[dl] \\
& & \{Rxffx\} &
\end{tikzcd}$$

$\forall x \forall y (\neg Rxy \vee Qx \vee Qy), \forall x \forall y (\neg Rxy \vee \neg Qx \vee \neg Qy), \forall x (Rxx \vee Rxffx)$
$\models \forall x Rxffx$

Sequenzenkalküle → Abschnitt 6.1

vgl. AL Sequenzenkalkül

Allgemeingültigkeitsbeweise (für bel. FO-Formeln/Sätze)

Gegenstand: FO-*Sequenzen* $\Gamma \vdash \Delta$
für endliche $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$

$\Gamma \vdash \Delta$ *allgemeingültig* wenn $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$

Beweisziel: Ableitung allgemeingültiger Sequenzen

Ableitungsschritte: Anwendung von *Regeln*
(zur Erzeugung von Sequenzen)

Korrektheit: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig.

Vollständigkeit: jede allgemeingültige Sequenz ist ableitbar.
(schwache Form, wird später verschärft)

Sequenzenkalkül: Regeln und Korrektheit

Format von *Sequenzenregeln* (wie in AL): $\dfrac{\text{Prämissen}}{\text{Konklusion}}$

Konklusionen von Regeln ohne Prämisssen: *Axiome*

ableitbare Sequenzen:
ausgehend von Axiomen (in endlich vielen Schritten) durch Anwendung von Sequenzenregeln erzeugte Sequenzen

Korrektheit: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig

folgt aus der Korrektheit der einzelnen Regeln:

- die Axiome sind allgemeingültige Sequenzen;
- für Regeln mit Prämissen:
  Prämissen allgemeingültig $\Rightarrow$ Konklusion allgemeingültig.

Sequenzenkalkül: Regeln

FO Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$, drei Gruppen von Regeln:

- *AL Regeln* (analog zum AL-Sequenzenkalkül).
- *Quantorenregeln*: Einführung von $\forall$ oder $\exists$ links/rechts.
  $(\forall\mathrm{L})$, $(\forall\mathrm{R})$, $(\exists\mathrm{L})$, $(\exists\mathrm{R})$.
- *Gleichheitsregeln*: Umgang mit Term-Gleichheiten.
  $(=)$, (Sub-L), (Sub-R).

$\boxed{\text{AL + Quantorenregeln: vollständiger Beweiskalkül } \mathcal{SK}^{\neq} \text{ für FO}^{\neq}}$

$\boxed{\mathcal{SK}^{\neq} + \text{Gleichheitsregeln: vollständiger Beweiskalkül } \mathcal{SK} \text{ für FO}}$

Zusätzlich (nicht notwendig aber natürlich) in $\mathcal{SK}^{+}$:

- *Schnittregeln*: Kettenschlüsse und Beweise durch Widerspruch.

Sequenzenkalkül: Quantorenregeln

$$(\forall\mathrm{L})\quad \frac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi(x) \vdash \Delta} \qquad (\forall\mathrm{R})\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi(x)}$$

falls c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

$$(\exists\mathrm{L})\quad \frac{\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi(x) \vdash \Delta} \qquad (\exists\mathrm{R})\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi(x)}$$

falls c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

Korrektheit prüfen!

Sequenzenkalkül: Gleichheitsregeln

$$(=)\quad \frac{\Gamma, t = t \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

$$(\text{Sub-L})\quad \frac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, t = t', \varphi(t'/x) \vdash \Delta} \qquad (\text{Sub-R})\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma, t = t' \vdash \Delta, \varphi(t'/x)}$$

und analoge Regeln mit $t' = t$ statt $t = t'$

Korrektheit prüfen!

Sequenzenkalkül: Schnittregeln (optional)

$$(\text{modus ponens})\quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$$

$$(\text{Kontradiktion})\quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \neg\varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \emptyset}$$

Korrektheit prüfen!

Bem.: Kontradiktionsregel (lokal) mit modus ponens simulierbar

beide Regeln lassen sich (nicht lokal) eliminieren

(vgl. AL-Sequenzenkalkül)

unterscheide *schnittfreie* Kalküle wie $\mathcal{SK}$
von solchen mit Schnittregeln wir $\mathcal{SK}^{+}$

Ziel: Vollständigkeit → Abschnitt 6.3

Definitionen:

Ableitbarkeit aus Theorie $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0$:

φ **ableitbar aus Φ** $[\Phi \vdash \varphi]$ gdw.

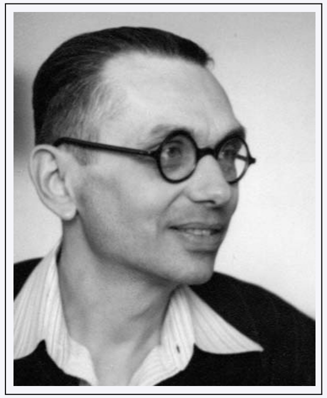
für geeignetes $\Gamma_0 \subseteq \Phi$ (Voraussetzungen) ist $\Gamma_0 \vdash \varphi$ ableitbar.

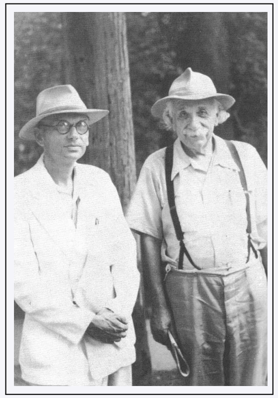
Φ konsistent (widerspruchsfrei) gdw. *nicht* $\Phi \vdash \emptyset$.

Vollständigkeit (starke Form) ... **Korrektheit**

Vollständigkeit	Korrektheit
$\Phi \models \varphi \;\Rightarrow\; \Phi \vdash \varphi$	$\Phi \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \Phi \models \varphi$
Φ konsistent $\Rightarrow$ Φ erfüllbar	Φ erfüllbar $\Rightarrow$ Φ konsistent
alles, was wahr ist, ist ableitbar	alles, was ableitbar ist, ist wahr

Kurt Gödel (1906–1978)





mit Albert Einstein

der Logiker des 20. Jahrhunderts

Gödelscher Vollständigkeitssatz (Satz 6.7)

(Vollständigkeit & Korrektheit des Sequenzenkalküls)

Für jede Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$
und jeden Satz $\varphi \in \mathrm{FO}_0(S)$ gelten:

- $\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi \vdash \varphi$.
- Φ erfüllbar gdw. Φ konsistent.

Zentrale Folgerungen

Kompaktheitssatz (wesentlich neuer Zugang)

Allgemeingültigkeit rekursiv aufzählbar
(später: nicht entscheidbar)

Vollständigkeitsbeweise → Abschnitt 6.3

zu zeigen: Konsistenz $\Rightarrow$ Erfüllbarkeit

$\left.\begin{array}{r}\text{nicht-Ableitbarkeit}\\ \text{best. Sequenzen}\end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ Existenz eines Modells

dazu

Ableitbarkeit von Sequenzen aus einer Satzmenge

Ableitbarkeit unter gegebenen Voraussetzungen:

$\Gamma \vdash \Delta$ *ableitbar aus* Φ gdw. für geeignetes $\Gamma_0 \subseteq \Phi$
$\Gamma_0, \Gamma \vdash \Delta$ ableitbar ist.

Vollständigkeitsbeweise (Grundideen)

Hintikka-Konstruktion (Vollständigkeit von $\mathcal{SK}^{\neq}$ bzw. $\mathcal{SK}$)

zeige: $\Gamma \vdash \Delta$ *nicht* ableitbar aus $\Phi \;\Rightarrow\; \Phi \cup \Gamma \cup \Delta^{\neg}$ erfüllbar

Man findet Modell einer induktiv geeignet gewählten Obermenge von $\Phi \cup \Gamma \cup \Delta^{\neg}$ ($\rightarrow$ Hintikka-Menge).

Henkin-Konstruktion (Vollständigkeit von $\mathcal{SK}^{+}$, einfacher)

zeige: Φ *konsistent* $\Rightarrow$ Φ erfüllbar

Man findet Modell einer induktiv geeignet gewählten vollständigen Obermenge von Φ ($\rightarrow$ Henkin-Menge).
in beiden Fällen: Modelle (als Quotient) einer Herbrand-Struktur

im Sequenzenkalkül mit Schnittregeln:

Satz

Für konsistentes Φ:
$\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ konsistent gdw. *nicht* $\Phi \vdash \varphi$.

Begründung:

(1) Falls $\Gamma \vdash \varphi$ ableitbar ist, so auch $\Gamma, \neg\varphi \vdash \emptyset$ mit $(\neg\mathrm{L})$

(2) Falls $\Gamma, \neg\varphi \vdash \emptyset$ ableitbar, so auch $\Gamma \vdash \varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \emptyset}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}\,(\neg\mathrm{R}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,(\mathrm{Ax})}{\emptyset \vdash \neg\varphi, \varphi}\,(\neg\mathrm{R})}{\neg\neg\varphi \vdash \varphi}\,(\neg\mathrm{L})}{\Gamma \vdash \varphi}\,(\text{mod. pon.})$$

Bem: Ebenso auch $\Phi \cup \{\varphi\}$ konsistent gdw. *nicht* $\Phi \vdash \neg\varphi$.

Henkin-Mengen: vollständig mit Existenzbeispielen

$\hat{\Phi} \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$ *Henkin-Menge*, falls konsistent und:

- für jedes $\varphi \in \mathrm{FO}_0(S)$: $\varphi \in \hat{\Phi} \Leftrightarrow \neg\varphi \notin \hat{\Phi}$.
  (maximale Konsistenz; Vollständigkeit)
- für jedes $\psi(x) \in \mathrm{FO}(S)$ existiert $t \in T_0(S)$ mit
  $(\forall x \neg\psi(x) \vee \psi(t/x)) \in \hat{\Phi}$. (vgl. $\exists x \psi(x) \rightarrow \psi(t/x)$)
  (Existenzbeispiele, vgl. Skolemfunktionen)

Henkin-Methode:

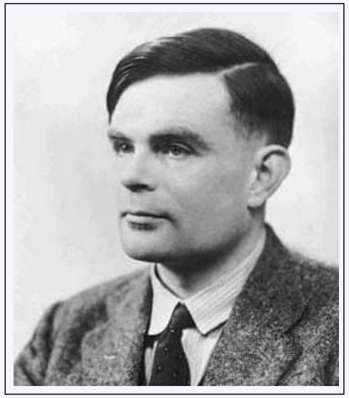
Zu konsistentem Φ finde Henkin-Menge $\hat{\Phi} \supseteq \Phi$

$\mathrm{FO}^{\neq}$ (*ohne Gleichheit*): Herbrand-Modell aus Henkin-Menge $\hat{\Phi}$.

FO (*mit Gleichheit*): Quotienten bzgl. der in $\hat{\Phi}$ postulierten Gleichheitsrelation auf $T_0(S)$.

Unentscheidbarkeit Church–Turing

Church (1903–1995)



Turing (1912–1954)