Spielsemantik – Semantik-Spiel

Satz:

$\mathcal{A} \models \psi[\mathbf{a}] \;\Leftrightarrow\;$ **V** hat Gewinnstrategie in Position $(\psi, \mathbf{a})$.

reduziert Auswertung auf Spielanalyse
oft mit algorithmisch optimaler Komplexität

Frage: Spiel für φ, das nicht in NNF ist?

das Konzept der Gleichung in der Algebra Robert Recorde

Arzt und früher Popularisierer der "Algebra"

der Erfinder des Gleichheitszeichens!

FO mit oder ohne = ? → Abschnitt 2.5

FO und $\mathrm{FO}^{\neq}$

- Gleichheit ist Bestandteil der *Logik* in FO;
  anders als interpretierte Relationen $R \in S$.
- natürliche Formalisierungen brauchen oft $=$,
  z.B.: Injektivität, algebraische Identitäten, ...
- dennoch möglich: Reduktion von FO auf $\mathrm{FO}^{\neq}$;
  Idee: modelliere $=$ durch interpretierte Relation $\sim$.

$\hat{S} := S \cup \{\sim\}$

Verträglichkeitsbedingungen:
$\sim$ Kongruenzrelation bzgl. aller $R, f \in S$

erhalte Modelle $\mathcal{A}_0$ mit echter Gleichheit als $\sim$-Quotientien:

$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}/\!\sim^{\mathcal{A}} = \big(A/\!\sim^{\mathcal{A}}, \ldots, [c^{\mathcal{A}}]_{\sim^{\mathcal{A}}}, \ldots, f^{\mathcal{A}}/\!\sim^{\mathcal{A}}, \ldots, R^{\mathcal{A}}/\!\sim^{\mathcal{A}}\big)$
$\sim$-Äquivalenzklassen als Elemente

Pränexe Normalform → Abschnitt 3.1

$\varphi \in \mathrm{FO}(S)$ in *pränexer Normalform* (PNF):

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi = Q_1 x_{i_1} \ldots Q_k x_{i_k} \psi, \\ Q_i \in \{\forall, \exists\},\ k \in \mathbb{N},\ \psi \text{ quantorenfrei.} \end{array}}$$

Beispiele

$$\exists y(Exy \wedge \forall x(Eyx \rightarrow x = y)) \;\equiv\; \exists y \forall z\big(Exy \wedge (Eyz \rightarrow z = y)\big)$$
$$\exists y \forall x Exy \vee \neg \exists y Exy \;\equiv\; \exists y_1 \forall y_2 \forall y_3 \big(Ey_2 y_1 \vee \neg Exy_3\big)$$

Satz über PNF

Jede FO-Formel ist logisch äquivalent zu einer Formel in PNF.

Beweis durch Induktion über $\varphi \in \mathrm{FO}(S)$.

Substitution → Abschnitt 3.2

das semantisch korrekte Einsetzen von Termen

gesucht: für $t \in T(S)$ und $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(S)$,
$\varphi' := \varphi(t/x) \in \mathrm{FO}(S)$ so, dass:

$$\boxed{\mathfrak{I} \models \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}[x \mapsto t^{\mathfrak{I}}] \models \varphi.}$$

Vorsicht! Naives Ersetzen von x durch t tut's nicht!

- beachte, dass x frei und gebunden auftreten kann.
- beachte, dass Variablen in t nicht fälschlich gebunden werden.

Methode
Induktive Definition, die intern gebundene Variablen so umbenennt, dass Konflikte vermieden werden.

Beispiel: $\varphi(x) = \forall y\big(Exy \wedge \exists x \neg Exy\big)$

$\varphi(fy/x) = ?$

Thoralf Skolem (1887–1963)

Logik, Modelltheorie, Mengenlehre

Skolemisierung: alles universell ? → Abschnitt 3.3

universell-pränexe Formeln: $\forall x_{i_1} \dots \forall x_{i_k} \psi$, ψ quantorenfrei

- nicht jede Formel ist logisch äquivalent zu universell-pränexer Formel, z.B. $\varphi = \forall x \exists y\, Exy$
- aber jede Formel ist *erfüllbarkeitsäquivalent* zu universell-pränexer Formel.

Idee: neue Funktionen, die *ggf.* Existenzbeispiele liefern
[vgl. $\exists$-Züge für **V** im Semantik Spiel]

Beispiel

$\varphi = \forall x \exists y\, Exy \quad \longmapsto \quad \varphi' = \forall x\, Exfx \qquad$ (für *neues* f)

dann gilt:

(i) $\mathcal{A}' = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}'}) \models \varphi' \;\Rightarrow\; \mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots) \models \varphi$

(ii) $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots) \models \varphi \;\Rightarrow\;$ es gibt $f^{\mathcal{A}}$ über A, sodass
$\mathcal{A}' = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}'}) \models \varphi'$

Skolemnormalform (Satz 3.6)

Satz über die Skolemnormalform

Jedes $\varphi \in \mathrm{FO}$ ist *erfüllbarkeitsäquivalent* zu einer universell-pränexen Formel φ' (in einer erweiterten Signatur).

Man erhält φ' aus einer zu φ logisch äquivalenten Formel in PNF durch Substitution von *Skolemfunktions*termen für existentiell abquantifizierte Variablen.

Zur Erfüllbarkeitsäquivalenz gilt sogar:

- $\varphi' \models \varphi$.
- jedes Modell von φ lässt sich zu Modell von φ' erweitern.

Jacques Herbrand (1908–1931)

Logiker und Algebraiker

Satz von Herbrand → Abschnitt 3.4

zur Erfüllbarkeit von universellen
$\mathrm{FO}^{\neq}$-Sätzen in Herbrand-Modellen

- S enthalte mindestens ein Konstantensymbol
- geg. $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S)$: Satzmenge, *universell & gleichheitsfrei*

Herbrand-Struktur (Erinnerung):
die S_{F}-Termstruktur $\mathcal{T}_0(S)$ über $T_0(S)$ (variablenfreie S-Terme)

Herbrand-Modell:
Expansion der Termstruktur $\mathcal{T}_0(S)$ zu S-Struktur,
— durch Interpretation von R (n-st.) als Teilmenge von $T_0(S)^n$ —
zu einem Modell von Φ

Gleichheitsfreiheit notwendig!

Satz von Herbrand (Satz 3.10)

Satz von Herbrand

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S)$ Menge von *universellen, gleichheitsfreien* Sätzen;
S habe mindestens ein Konstantensymbol.

Dann gilt: $\boxed{\Phi \text{ erfüllbar } \Leftrightarrow \text{ es existiert ein Herbrand-Modell } \mathcal{H} = (\mathcal{T}_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R \in S}) \models \Phi.}$

Beweis

"$\Leftarrow$": offensichtlich.
"$\Rightarrow$": geeignete Interpretationen $R^{\mathcal{H}}$ aus geg. Modell $\mathcal{A} \models \Phi$.

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL → Abschnitt 3.5

Reduktions-Idee: $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(S)$ (bel. Formelmenge)

erf.-äquiv.

$\Phi' \subseteq \mathrm{FO}_0(S_1)$ (Satzmenge)

erf.-äquiv.

$\Phi'' \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S_2)$ (gleichheitsfrei)

erf.-äquiv.

$\Phi''' \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S_3)$ (universell(-pränex))

$\boxed{\Phi \text{ erfüllbar } \Leftrightarrow \Phi''' \text{ erfüllbar } \Leftrightarrow \Phi''' \text{ in Herbrand-Modell erfüllbar}}$

und Bedingungen an Herbrand-Modell lassen sich in AL kodieren!

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL

für universell-pränexes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S)$ über S mit Konstanten

Φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Φ hat ein Herbrand-Modell $\mathcal{H} = (T_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R\in S}) \models \Phi$

$\Leftrightarrow$ für alle $R \in S$ (n-st.) existieren $R^{\mathcal{H}} \subseteq T_0(S)^n$, sodass $\mathcal{H} = (T_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R\in S}) \models \Phi$

$\mathcal{V} := \{ p_\alpha : \alpha$ relationales Atom über $T_0(S) \}$

$\alpha = \mathtt{Rt_1 \ldots t_n}$; $R \in S$; $t_1, \ldots, t_n \in T_0(S)$, $R \in S$ (n-stellig)

$\mathcal{V}$-Interpretationen $\mathfrak{I}$ beschreiben dann mögliche $\mathcal{H}$:

bijektive Korrepondenz $\mathcal{H} \leftrightarrow \mathfrak{I}$:

von $\mathfrak{I}$ zu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathfrak{I})$: $R^{\mathcal{H}} = \{(t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n : \mathfrak{I}(p_{\mathtt{Rt_1\ldots t_n}}) = 1\}$

von $\mathcal{H}$ zu $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathcal{H})$: $\mathfrak{I} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{B}$

$$p_\alpha \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{H} \models \alpha, \\ 0 & \text{falls } \mathcal{H} \models \neg\alpha. \end{cases}$$

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL

für $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \xi(x_1, \ldots, x_n) = \forall \mathbf{x} \, \xi(\mathbf{x})$, ξ quantorenfrei und $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathfrak{I})$ gilt:

$\mathcal{H} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{H} \models \xi[\mathbf{t}]$ für alle $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n$

gdw. $\mathfrak{I} \models \xi(\mathbf{t})^{\mathrm{AL}}$ für alle $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n$

dabei erhält man $\xi(\mathbf{t})^{\mathrm{AL}} \in \mathrm{AL}(\mathcal{V})$ aus $\xi(\mathbf{t})$ durch Ersetzen von Atomen $\alpha = \mathtt{R}\ldots$ durch AL-Variablen p_α

für $[\![\Phi]\!]^{\mathrm{AL}} := \bigcup_{\forall \mathbf{x}\xi \in \Phi} \{\xi(\mathbf{t})^{\mathrm{AL}} : \mathbf{t} \text{ in } T_0(S)\}$ gilt:

$$\boxed{\mathbf{\Phi \text{ erfüllbar gdw. } [\![\Phi]\!]^{\mathrm{AL}} \text{ erfüllbar}}}$$

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL

Beispiel $\xi(\mathbf{t})^{\mathrm{AL}} \in \mathrm{AL}(\mathcal{V})$

$\left.\begin{array}{l} \xi = Rxfy \vee (Ufx \to Wxyfz) \\ \mathbf{t} = (c, fc, d) \text{ für } (x, y, z) \end{array}\right\}$ liefert

$$\xi(c, fc, d)^{\mathrm{AL}} = p_{\mathtt{Rcffc}} \vee (p_{\mathtt{Ufc}} \to p_{\mathtt{Wcfcfd}})$$

$\left.\begin{array}{l} \xi = Rxy \to (Qx \leftrightarrow \neg Qy) \\ \mathbf{t} = (f^n c, f^m c) \text{ für } (x, y) \end{array}\right\}$ liefert

$$\xi(f^n c, f^m c)^{\mathrm{AL}} = p_{\mathtt{Rf^n f^m c}} \to (p_{\mathtt{Qf^n c}} \leftrightarrow \neg p_{\mathtt{Qf^m c}})$$

Beispiel

$S = \{R, Q, f\}$ R (2-st.), Q (1-st.), Relationssymbole
f (1-st.), Funktionssymbol

Behauptung: $\Phi : \begin{cases} \varphi_1 = \forall x \forall y \big(Rxy \to (Qx \leftrightarrow \neg Qy)\big) \\ \varphi_2 = \forall x (Rxfx \vee Rfxx) \\ \varphi_3 = \forall x \forall y \big(\neg Rxy \to Rxffy\big) \end{cases}$

ist unerfüllbar

$S_c := S \cup \{c\}$ $T_0(S_c) = \{c, fc, ffc, fffc, \ldots\} = \{f^n c : n \in \mathbb{N}\}$

AL-Variablen für die Reduktion:

q_n	$(= p_{\mathtt{Qf^n c}})$	für die Atome $Qf^n c$,	$(n \in \mathbb{N})$,
$r_{\ell,m}$	$(= p_{\mathtt{Rf^\ell cf^m c}})$	für die Atome $Rf^\ell cf^m c$,	$(\ell, m \in \mathbb{N})$.

wir erhalten z.B. für φ_1 die AL-Formelmenge

$$[\![\varphi_1]\!]^{\mathrm{AL}} = \{ r_{\ell,m} \to (q_\ell \leftrightarrow \neg q_m) : \ell, m \in \mathbb{N} \}$$

Beispiel (fortges.)

zugeh. AL-Formelmenegen zu $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$\begin{cases} [\![\varphi_1]\!]^{\mathrm{AL}} = \{r_{\ell,m} \rightarrow (q_\ell \leftrightarrow \neg q_m) : \ell, m \in \mathbb{N}\} \\ [\![\varphi_2]\!]^{\mathrm{AL}} = \{r_{\ell,\ell+1} \vee r_{\ell+1,\ell} : \ell \in \mathbb{N}\} \\ [\![\varphi_3]\!]^{\mathrm{AL}} = \{\neg r_{\ell,m} \rightarrow r_{\ell,m+2} : \ell, m \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

Unerfüllbarkeit von Φ folgt daher z.B. aus AL-Unerfüllbarkeit von

$$\underbrace{\begin{array}{l} r_{0,0} \rightarrow (q_0 \leftrightarrow \neg q_0), \\ r_{0,1} \rightarrow (q_0 \leftrightarrow \neg q_1), \\ r_{1,0} \rightarrow (q_1 \leftrightarrow \neg q_0), \\ r_{0,2} \rightarrow (q_0 \leftrightarrow \neg q_2), \\ r_{1,2} \rightarrow (q_1 \leftrightarrow \neg q_2), \\ r_{2,1} \rightarrow (q_2 \leftrightarrow \neg q_1), \end{array}}_{\in [\![\varphi_1]\!]^{\mathrm{AL}}} \quad \underbrace{\begin{array}{l} r_{0,1} \vee r_{1,0}, \\ r_{1,2} \vee r_{2,1}, \end{array}}_{\in [\![\varphi_2]\!]^{\mathrm{AL}}} \quad \underbrace{\neg r_{0,0} \rightarrow r_{0,2}}_{\in [\![\varphi_3]\!]^{\mathrm{AL}}}$$

FO Kompaktheit (Satz 4.1)

Kompaktheitssatz (Endlichkeitssatz)

Version 1: (Erfüllbarkeit)

Für $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ sind äquivalent:

(i) Φ erfüllbar.

(ii) Jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar.

Version 2: (Folgerungsbeziehung)

Für $\Phi \subseteq \mathrm{FO}, \varphi \in \mathrm{FO}$ sind äquivalent:

(i) $\Phi \models \varphi$.

(ii) $\Phi_0 \models \varphi$ für eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

Version 1 $\Leftrightarrow$ Version 2 (zur Übung!)

Version 1 für universell-pränexes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}$: Reduktion auf AL

FO Kompaktheit $\rightarrow$ Abschnitt 4

Konsequenzen: die Stärken des Endlichkeitssatzes
die Schwächen von FO

mit Kompaktheit findet man:

beliebig große endliche Modelle $\Rightarrow$ unendliche Modelle

zu Φ betrachte $\Phi \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i = x_j : n \geqslant 1\}$

unendliche Modelle $\Rightarrow$ beliebig große unendliche Modelle

zu Φ betrachte $\Phi \cup \{\neg c_i = c_j : i \neq j; i, j \in I\}$
für neue Konstanten $(c_i)_{i \in I}$

$\Rightarrow$ *keine* unendliche Struktur in FO
bis auf Isomorphie charakterisierbar

FO Kompaktheit

Konsequenzen: die Stärken des Endlichkeitssatzes
die Schwächen von FO

mit Kompaktheitsargumenten findet man:

Nichtstandardmodelle

von (unendlichen) Standardmodellen
in FO ununterscheidbare Strukturen

z.B. $\mathcal{N}^*$ zu $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$
Nichtstandardmodell der Arithmetik mit
'unendlich großen natürlichen Zahlen'

zur vollständigen FO-Theorie von $\mathcal{N}$, $\Phi := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \mathcal{N} \models \varphi\}$

betrachte $\Phi \cup \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} < c : n \geqslant 2\}$ für neue Konstanten c