Logikkalküle: Deduktion und Refutation

Logikkalküle: rein syntaktische Formate für formale Beweise.

Formale Beweise: syntaktische Zeichenketten,
nach einfach nachprüfbaren syntaktischen Regeln aufgebaut
(Regelsystem: *Kalkül*).

Ableitung: Erzeugung von (regelkonformen) formalen Beweisen.

Korrektheit nur semantisch korrekte Sachverhalte sind formal beweisbar (ableitbar).

Vollständigkeit jeder semantisch korrekte Sachverhalt ist formal beweisbar (ableitbar).

Resolution: ein *Widerlegungskalkül* für die *Unerfüllbarkeit* von KNF-Formeln.

Sequenzenkalkül: ein *Deduktionskalkül* für *Allgemeingültigkeit* beliebiger AL-Formeln.

KNF in Klauselform → Abschnitt 5.1

KNF: Konjunktionen von Disjunktionen von Literalen.
Notation: L für Literal; $\overline{L}$ für komplementäres Literal; $\overline{L} \equiv \neg L$.

Klausel: endliche Menge von Literalen
$C = \{L_1, \dots, L_k\}$ steht für $\bigvee C \equiv L_1 \vee \dots \vee L_k$
$\Box$ steht für die leere Klausel.
Erinnerung: $\Box \equiv \bigvee \emptyset \equiv 0$.

Klauselmenge: Menge von Klauseln
$K = \{C_1, \dots, C_\ell\}$ steht für $\bigwedge K \equiv C_1 \wedge \dots \wedge C_\ell$
Erinnerung: $\bigwedge \emptyset \equiv 1$.

$\boxed{\text{endliche Klauselmengen} \approx \text{KNF-Formeln}}$

Resolutionskalkül arbeitet mit KNF in Klauselform
Ableitungsziel: Nachweis der Unerfüllbarkeit einer geg. Klauselmenge durch Ableitung der leeren Klausel $\Box$

Resolution → Abschnitt 5.2

Beispiele: $L, \overline{L} \in C \;\Rightarrow\; C \equiv 1$ allgemeingültig.

$C \equiv 1 \;\Rightarrow\; K \equiv K \setminus \{C\}$.

$\Box \in K \;\Rightarrow\; K \equiv 0$ (unerfüllbar).

Resolventen und Resolutionslemma

$$L \in C_1, \overline{L} \in C_2 \;\Rightarrow\; \{C_1, C_2\} \equiv \{C_1, C_2, C\}$$

$$\text{wobei } C = \underbrace{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{L}\})}_{\textit{Resolvente}}$$

Resolution

diagrammatisch:

$$\begin{tikzcd}
C_1 = \{\dots, L\} \arrow[dr] & & C_2 = \{\dots, \overline{L}\} \arrow[dl] \\
& C = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{L}\}) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{p, \underline{\neg q}, r\} \arrow[dr] & & \{p, \underline{q}, s, t\} \arrow[dl] \\
& \{p, r, s, t\} &
\end{tikzcd}$$

Resolutionslemma (Lemma 5.5)

Seien $C_1, C_2 \in K$, C Resolvente von C_1 und C_2.
Dann ist $K \equiv K \cup \{C\}$. [also $K \models C$]

Res(K) und Res*(K)

$\mathrm{Res}(K) := K \cup \{C\colon\ C$ Resolvente von Klauseln in $K\ \}$.

Klausel C heißt (im Resolutionskalkül) *ableitbar* aus K, gdw.
$C \in \underbrace{\mathrm{Res}\cdots\mathrm{Res}}_{n\text{-mal}}(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

$\mathrm{Res}^*(K)$: die Menge aller aus K ableitbaren Klauseln.

Korrektheit / Vollständigkeit

Korrektheit: $\Box \in \mathrm{Res}^*(K) \Rightarrow K \equiv 0$ (unerfüllbar). [R-Lemma]

Vollständigkeit: K unerfüllbar $\Rightarrow \Box \in \mathrm{Res}^*(K)$.

Resolutionskalkül: Vollständigkeit → Abschnitt 5.3

z.z.: K über $\mathcal{V}_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$ unerfüllbar $\Rightarrow$ $\Box \in \mathrm{Res}^*(K)$.

Beweis durch Induktion über n.

Induktionsschritt von n nach n + 1

Aus $K = \{C_1, \ldots, C_k\}$ über $\mathcal{V}_{n+1}$ gewinne K_0 und K_1 über $\mathcal{V}_n$:

$K_0 \equiv K \cup \{\{\neg p_{n+1}\}\}$ $\quad K_1 \equiv K \cup \{\{p_{n+1}\}\}$ (wie?)

K unerfüllbar $\Rightarrow$ K_0 und K_1 unerfüllbar
$\Rightarrow$ $\Box \in \mathrm{Res}^*(K_0)$ und $\Box \in \mathrm{Res}^*(K_1)$.

Dann ist $\Box \in \mathrm{Res}^*(K)$ oder $\begin{cases} \{p_{n+1}\} \in \mathrm{Res}^*(K) \\ \text{und} \\ \{\neg p_{n+1}\} \in \mathrm{Res}^*(K) \end{cases}$

und demnach jedenfalls $\Box \in \mathrm{Res}^*(K)$.

Resolutionsalgorithmus

breadth-first-search, Breitensuche

Eingabe: K [Klauselmenge, endlich]

$R := K$
WHILE $(\mathrm{Res}(R) \neq R$ and $\Box \notin R)$ DO $R := \mathrm{Res}(R)$ OD

IF $\Box \in R$ THEN output "unerfüllbar"
ELSE output "erfüllbar"

Beweis im Resolutionskakül

Ableitungsbaum für $\Box$:
– Knoten mit Klauseln beschriftet
– $\Box$ an der Wurzel
– Resolventen an binären Verzweigungen
– Klauseln aus K an den Blättern

Hornklauseln → Abschnitt 5.4

- interessanter Spezialfall für KI Anwendungen,
- AL-HORN-SAT-Problem effizient entscheidbar
- logische Programmierung (Prolog: FO Horn-Formeln)

Hornklausel:
Klausel mit *höchstens einem positiven* Literal
z.B. $C = \{\neg q_1, \ldots, \neg q_r, q\} \equiv (q_1 \wedge \ldots \wedge q_r) \rightarrow q$;
auch $\Box$ ist Hornklausel.

Spezialfälle: C besteht nur aus positivem Literal: *positiv*.
C ohne positive Literale: *negativ*.

Beobachtungen:

Mengen von negativen Hornklauseln trivial erfüllbar ($p_i \mapsto 0$).
Mengen von nicht-negativen Hornklauseln besitzen eindeutige *minimale* erfüllende Interpretationen.

Hornklauseln

Effizienter Horn-Erfüllbarkeitstest: Grundidee

H Hornklauselmenge; $H^- \subseteq H$ negative Klauseln in H
$H_0 := H \setminus H^-$ nicht negative Klauseln

1. Schritt: Berechne minimale Interpretation $\mathfrak{I}_0 \models H_0$.
2. Schritt: Prüfe, ob $\mathfrak{I}_0 \models H^-$.

Korrektheit

$\mathfrak{I}_0 \models H^- \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{I}_0 \models H.$

$\mathfrak{I} \models H \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{I} \models H_0$, also $\mathfrak{I}_0 \leqslant \mathfrak{I}$.
$\mathfrak{I} \models H^- \;\Rightarrow\; \mathfrak{I}_0 \models H^-$ (und $\mathfrak{I}_0 \models H$).

Sequenzenkalkül allgemeiner Beweiskalkül

Sequenzen

$\Gamma \vdash \Delta$ $\quad \Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$, endlich
auch: $\Gamma; \Delta$ oder Γ, Δ
Γ, Δ als ungeordnete Listen ...

$\Gamma \vdash \Delta$ *allgemeingültig* gdw. $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$

wichtig: links Konjunktion (der Voraussetzungen)
rechts Disjunktion (möglicher Konsequenzen)

Bsp.: $\varphi \vdash \psi$ allgemeingültig gdw. $\varphi \models \psi$.
$\emptyset \vdash \psi$ allgemeingültig gdw. ψ allgemeingültig.
$\varphi \vdash \emptyset$ allgemeingültig gdw. φ unerfüllbar.

Sequenzenkalkül
Regeln zur Erzeugung aller allgemeingültigen Sequenzen.

AL Sequenzenkalkül

→ Abschnitt 6.2

Erzeugung allgemeingültiger Sequenzen durch Sequenzenregeln

Sequenzenregeln

neue Sequenzen aus bereits abgeleiteten Sequenzen

Format: $\dfrac{\text{Prämissen}}{\text{Konklusion}}$

Beispiele: $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi}$ oder $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$

Korrektheit
des Kalküls: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig.

einer Regel: sind die Prämissen allgemeingültig,
so auch die Konklusion.

AL Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$

(Ax) $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi}$

(0-Ax) $\dfrac{}{\Gamma, 0 \vdash \Delta}$ $\qquad$ (1-Ax) $\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, 1}$

$(\neg\mathrm{L})$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$ $\qquad$ $(\neg\mathrm{R})$ $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$

$(\vee\mathrm{L})$ $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}$ $\qquad$ $(\vee\mathrm{R})$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\wedge\mathrm{L})$ $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}$ $\qquad$ $(\wedge\mathrm{R})$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$

Korrektheit nachprüfen!

sogar rückwärts (ohne Informationsverlust!)

Beispiel

Ableitung der allgemeingültigen Sequenz $p \vdash (p \wedge q) \vee \neg q$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p, \neg q}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash q}\,(\mathrm{Ax})}{p \vdash q, \neg q}\,(\neg\mathrm{R})}{p \vdash (p \wedge q), \neg q}\,(\wedge\mathrm{R})}{p \vdash (p \wedge q) \vee \neg q}\,(\vee\mathrm{R})
$$

Vollständigkeit

→ Abschnitt 6.3

Jede allgemeingültige Sequenz ist ableitbar.
Beweisidee: systematische Beweissuche rückwärts

> zu jeder Formel in einer Konklusions-Sequenz existiert (genau) eine Regel mit Prämissen, in der diese Formel abgebaut ist.

in rückwärts von der Zielsequenz generiertem Beweisbaum gilt:

Zielsequenz allgemeingültig $\Leftrightarrow$ alle Sequenzen an den Blättern sind allgemeingültig

eine Sequenz aus Variablen ist allgemeingültig $\Leftrightarrow$ Instanz von (Ax), Axiom

Beispiel Beweissuche

für eine *nicht* allgemeingültige Sequenz

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \mathbf{p \vdash q}}{p \vdash p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R}) \qquad \dfrac{\mathbf{q \vdash p} \qquad \dfrac{}{q \vdash q}\,(\mathrm{Ax})}{q \vdash p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R})}{p \vee q \vdash p \wedge q}\,(\vee\mathrm{L})
$$

Man liest ab, dass z.B. die Interpretation $p \mapsto 1\,;\ q \mapsto 0$ ein Gegenbeispiel liefert.

Satz

Der AL Sequenzenkalkül ist korrekt und vollständig für die Ableitung aller allgemeingültigen AL Sequenzen.

Schnittregeln, von $\mathcal{SK}$ zu $\mathcal{SK}^+$

Hinzunahme weiterer *korrekter* Regeln erhält Korrektheit und Vollständigkeit

Schnittregel erlaubt direkte Nachbildung von $\begin{cases} \textbf{Kettenschlüssen} \\ \textbf{indirektem Beweis} \end{cases}$

- Kettenschluss: aus $(A \Rightarrow B)$ und $(B \Rightarrow C)$ gewinne $(A \Rightarrow C)$ klassische Schlussfigur des "modus ponens"
- indirekter Beweis: aus $(\neg A \Rightarrow \bot)$ gewinne A

$$
\boxed{(\text{modus ponens}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}}
$$

korrekt (nachprüfen!)

Bem.: Anwendung von modus ponens 'schluckt' Hilfsformel φ; problematisch für (rückwärtsgerichtete) Beweissuche