Ausdrucksstärke verschiedener Logiken → Abschnitt 8

Fragen: Welche Struktureigenschaften können in gegebener Logik formalisiert werden?

Welche Eigenschaften sind nicht ausdrückbar?

z.B. *nicht* in FO: Endlichkeit der Trägermenge
Zusammenhang von (endlichen) Graphen
gerade Länge endlicher linearer Ordnungen
...

→ **Modelltheorie**

die Methode zur Analyse der Ausdrucksstärke:

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Fragen der Ausdrucksstärke

Kernfrage: **welche Logik wofür?**

zB bei der Wahl einer Logik als Sprache für

Spezifikation, Verifikation, Deduktion
Wissensrepräsentation, Datenbankabfragen

Kriterien: algorithmische Eigenschaften
beweistheoretische Eigenschaften
Ausdrucksstärke

- wie kann man analysieren, was ausdrückbar ist?
- wie erkennt/beweist man, dass etwas *nicht* ausdrückbar ist?

Ausdrucksstärke: Beispiele

Es gibt keine Satzmenge in $\mathrm{FO}(\{E\})$, die den Zusammenhang von Graphen (V, E) formalisiert (analog für Erreichbarkeitsfragen).

Es gibt keinen Satz in $\mathrm{FO}(\{E\})$, der den Zusammenhang von endlichen Graphen (V, E) formalisiert (analog für Erreichbarkeit).

Jeder Satz in $\mathrm{FO}(\{<\})$, der formalisiert, dass $<$ eine lineare Ordnung ist, benutzt mehr als zwei Variablen.

Es gibt keinen Satz in $\mathrm{FO}(\{<\})$, der von einer endlichen linearen Ordnung $(A, <)$ besagt, dass sie ungerade Länge hat.

Jeder Satz in $\mathrm{FO}(\{<\})$, der von einer linearen Ordnung $(A, <)$ besagt, dass sie mindestens die Länge 17 hat, hat mindestens Quantorenrang 5.

Ehrenfeucht–Fraïssé Spiele → Abschnitt 8.1

vgl. auch Semantikspiel zwischen Verifizierer und Falsifizierer

Idee: Spielprotokoll für zwei Spieler **I** und **II**
zum *Vergleich* zweier Strukturen so, dass
$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ähnlich (ununterscheidbar in L)
wenn Spieler **II** Gewinnstrategie hat.

Spieler **II** muss in der jeweils anderen Struktur nachmachen,
was **I** in einer der Strukturen vorgibt

Spieler **I** versucht das Spiel auf Unterschiede zu lenken,
die das für **II** unmöglich machen

Verwendung
wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ununterscheidbar in L,
aber verschieden hinsichtlich Eigenschaft E,
dann lässt sich E *nicht* in L ausdrücken

das klassische Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel für FO

fixiere feste endliche relationale Signatur S

zB für Wortstrukturen zu Alphabet Σ: $S = \{<\} \cup \{P_a \colon a \in \Sigma\}$

Ununterscheidbarkeitsgrade $\mathcal{W}, \mathbf{m} \equiv_q \mathcal{W}', \mathbf{m}'$

f.a. $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathrm{FO}(S)$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant q$:
$\mathcal{W} \models \varphi[\mathbf{m}] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{W}' \models \varphi[\mathbf{m}']$

insbesondere für $q = 0$, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, $\mathbf{m}' = (m'_1, \ldots, m'_k)$:

$\mathcal{W}, \mathbf{m} \equiv_0 \mathcal{W}', \mathbf{m}'$ gdw. $\rho : (m_i \mapsto m'_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ **lokaler Isomorphismus**

Spielidee: **I** markiert sukzessive Elemente in $\mathcal{W}$ oder $\mathcal{W}'$,
II antwortet in der jeweils anderen Struktur,
II muss stets $\equiv_0$ (lokale Isomorphie) gewährleisten

die Spiele $G^q(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ und $G^q(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')$

Konfigurationen:
$(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')$ mit $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ und $\mathbf{m}' = (m'_1, \ldots, m'_k)$
wenn in $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}'$ jeweils k Elemente markiert sind

Zugabtausch in einer Runde:
I markiert in $\mathcal{W}$ oder in $\mathcal{W}'$ ein weiteres Element,
II ein Element in der jeweils anderen Struktur

von $(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')$
zu Nachfolgekonfiguration $(\mathcal{W}, \mathbf{m}, m_{k+1}; \mathcal{W}', \mathbf{m}', m'_{k+1})$

Gewinnbedingung:
II verliert wenn $\mathcal{W}, \mathbf{m} \not\equiv_0 \mathcal{W}', \mathbf{m}'$ (kein lokaler Isomorphismus)

$G^q(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')$:
Spiel über q Runden mit Startkonfiguration $(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')$

Ehrenfeucht-Fraïssé Satz (Satz 8.7)

für alle $q \in \mathbb{N}$, S-Strukturen $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}'$ mit Parametern
$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ in $\mathcal{W}$ und $\mathbf{m}' = (m'_1, \ldots, m'_k)$ in $\mathcal{W}'$
sind äquivalent:

(i) **II** hat Gewinnstrategie in $G^q(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')$

(ii) $\mathcal{W}, \mathbf{m} \equiv_q \mathcal{W}', \mathbf{m}'$

Beweis per Induktion über q. Strategieanalyse!

$q = 0$: trivial.

Gewinnstrategie für eine Runde verlangt gerade
Übereinstimmung hinsichtlich Existenzbeispielen für z
in allen Formeln $\exists z \varphi(\mathbf{x}, z)$ mit quantorenfreiem φ (warum?)

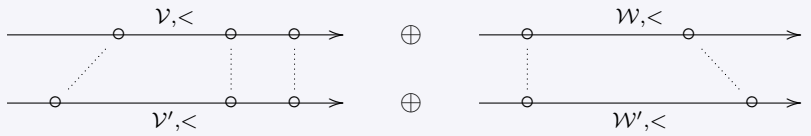
Gewinnstrategie für $q + 1$ Runden verlangt analog,
in der ersten Runde, Übereinstimmung hinsichtlich
aller Formeln $\exists z \varphi(\mathbf{x}, z)$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant q$

Spiele über Wortstrukturen und linearen Ordnungen

Kompatibilität mit Konkatenation (Beobachtung 8.11)

Gewinnstrategien für **II** sind verträglich mit Konkatenation

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{V}, \mathbf{m} \equiv_q \mathcal{V}', \mathbf{m}' \\ \mathcal{W}, \mathbf{n} \equiv_q \mathcal{W}', \mathbf{n}' \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \equiv_q \mathcal{V}' \oplus \mathcal{W}', \mathbf{m}', \mathbf{n}'$$



Modularität von Strategien:

$\equiv_q$ ist Kongruenzrelation bzgl. Konkatenation

für nackte endliche Ordnungen $\mathcal{O}_n = (\{1, \ldots, n\}, <)$

es gibt Sätze $\varphi_q \in \mathrm{FO}(\{<\})$, $q \geqslant 1$: (vgl. Beobachtung 8.12)

- $\mathrm{qr}(\varphi_q) = q$
- $\mathcal{O}_n \models \varphi_q$ gdw. $n \geqslant 2^q - 1$

insbesondere: $\mathcal{O}_n \not\equiv_q \mathcal{O}_m$ für $n < 2^q - 1 \leqslant m$

(noch einfacher: $\psi_q(x, y)$ für "$x < y$ und $|(x, y)| \geqslant 2^q - 1$")

E-F Spiel-Analyse:

$\mathcal{O}_n \equiv_q \mathcal{O}_m$ für $n, m \geqslant 2^q - 1$

genauer: in nackten linearen Ordnungen sind Distanzen ab 2^q mit Quantorenrang q *nicht* unterscheidbar

Strategien über nackten endlichen Ordnungen

vergleiche aufsteigende Tupel

$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ in $\mathcal{O}_n = (\{1, \ldots, n\}, <)$ und

$\mathbf{m}' = (m'_1, \ldots, m'_k)$ in $\mathcal{O}_{n'} = (\{1, \ldots, n'\}, <)$

Intervallgrößen:

i-ter Abschnitt: $m_i < x < m_{i+1}$ hat $d_i := m_{i+1} - m_i - 1$ Elemente

kritische Intervallgröße (für q weitere Runden): $2^q - 1$

$d \stackrel{q}{=} d' \;:\Leftrightarrow\; d = d'$ oder $d, d' \geqslant 2^q - 1$
"Gleichheit bis zur kritischen Intervalgröße"

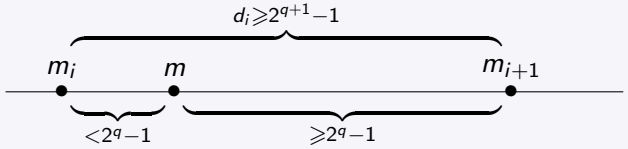
dann gilt:

$$\mathcal{O}_n, \mathbf{m} \equiv_q \mathcal{O}_{n'}, \mathbf{m}' \quad \text{gdw.} \quad d_i \stackrel{q}{=} d'_i \text{ für } i = 0, \ldots, k$$

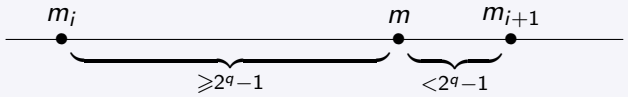
Strategiefindung: Auszug

wie **II** auf Herausforderungszug von **I** auf $m \in (m_i, m_{i+1})$ antworten kann (3 Fälle)

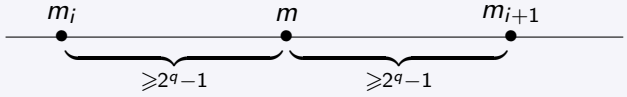
(a)



(b)



(c)



Folgerungen

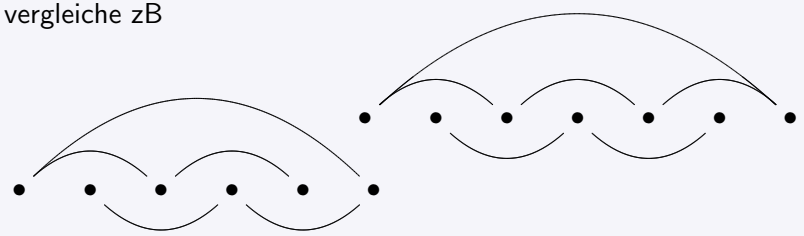
(1) **(un)gerade Länge endlicher linearer Ordnungen nicht in FO definierbar**

vergleiche Ordnungen der Längen $2^q - 1$ und 2^q:
Quantorenrang q reicht nicht aus

(2) **Zusammenhang endlicher Graphen nicht in FO definierbar**

logische Übersetzung (Interpretation) liefert Reduktion auf (1)

vergleiche zB



andere Logiken — andere Spiele → Abschnitt 8.2

am Beispiel zweier wichtiger (Familien von) Logiken in der Informatik

- **MSO, monadische Logik zweiter Stufe**
  Erweiterung von FO: Quantoren über Teilmengen
  → formale Sprachen, concurrency

- **ML, Modallogik**
  Fragment von FO: beschränkte Quantoren über Elemente
  → temporale Spezifikation, Wissensrepräsentation

hier: zugehörige Spiele und Beispiele für ihren Nutzen

MSO: monadische zweite Stufe

hier über Σ-Wortstrukturen, zu $S = \{<\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\}$
Elementvariable: $x_1, x_2, \ldots$

Mengenvariable: $X_1, X_2, \ldots$ für Teilmengen der Trägermenge

zu Syntax und Semantik von $\mathrm{MSO}(S)$

atomare Formeln: $x_i = x_j$, $x_i < x_j$, $P_a x_i$, $X_i x_j$
AL Junktoren $\wedge, \vee, \neg$ wie üblich
Quantifizierung über Elemente: $\forall x_i \varphi$, $\exists x_i \varphi$ wie in FO
Quantifizierung über Teilmengen: $\forall X_i \varphi$, $\exists X_i \varphi$

Beispiele für Ausdrucksmöglichkeiten:

Ordnungen/Wörter ungerader Länge
allgemeiner: reguläre Sprachen
MSO-Kodierung von DFA/NFA

MSO-Kodierung von DFA/NFA-Läufen

für Lauf von $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, A)$ auf Wort $w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^n$:

expandiere Wortmodell $\mathcal{W}_w$ durch Färbung mit Zuständen

Farben $(P_a)_{a\in\Sigma}$ (für Buchstabenfolge von w)
$+$ Farben $(X_q)_{q\in Q}$ (für Zustandsfolge von w)

a_1	a_2	a_3	a_4		a_{n-1}	a_n	$\mathcal{W}_w$
q_1	q_2	q_3	q_4		q_{n-1}	q_n	**X**

- finde $\varphi \in \mathrm{FO}(\{<\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\} \cup \{X_q : q \in Q\})$:

  "die X_q beschreiben Zustandsfolge
  einer akzeptierenden Berechnung
  von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{W}$"

- dann ist $\exists \mathbf{X} \varphi \in \mathrm{MSO}(\{<\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\})$ wie gewünscht

MSO-Spiel

Konfigurationen $(\mathcal{W}, \mathbf{Q}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{Q}', \mathbf{m}')$
mit markierten Elementen $\mathbf{m}/\mathbf{m}'$ und Teilmengen $\mathbf{Q}/\mathbf{Q}'$

zwei Zugvarianten { weiteres Element markieren; weitere Teilmenge markieren

Ehrenfeucht-Fraïssé Satz für MSO:

II hat Gewinnstrategie in $G^q_{\mathrm{MSO}}(\mathcal{W}, \mathbf{Q}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{Q}', \mathbf{m}')$
gdw. $\mathcal{W}, \mathbf{Q}, \mathbf{m} \equiv^{\mathrm{MSO}}_q \mathcal{W}', \mathbf{Q}', \mathbf{m}'$

auch im MSO-Spiel sind Gewinnstrategien
verträglich mit Konkatenation, und man gewinnt daraus:

Satz von Büchi

MSO-definierbare Eigenschaften von Σ-Wortstrukturen
entsprechen genau den regulären Σ-Sprachen

Beweisskizze zum Satz von Büchi

Annahme: $\{\mathcal{W}_w : w \in L\} = \{\mathcal{W}_w : \mathcal{W}_w \models \varphi\}$
für einen Satz $\varphi \in \mathrm{MSO}$

zu zeigen: L regulär, oder, nach Myhill–Nerode,

$\sim_L$ hat endlichen Index: $\boxed{\Sigma^*/\sim_L \text{ endlich}}$

sei dazu $\mathrm{qr}(\varphi) = q$,

dann verfeinert $\equiv_q$ die Relation $\sim_L$ (warum?)

$\equiv_q$ hat endlichen Index (warum?)

es folgt dass auch $\sim_L$ endlichen Index hat!

$\longrightarrow$ Automaten für MSO-model-checking

ML: Modallogik

hier über Σ-Transitionssystemen,
zu $S = \{E_a : a \in \Sigma\} \cup \{P_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$

Formeln von $\mathrm{ML}(S)$ sprechen über einzelne Zustände in Σ-Transitionssystemen mit atomaren Zustandseigenschaften $p_i \leftrightsquigarrow P_i$

Syntax von $\mathrm{ML}(S)$

atomare Formeln: $\bot$, $\top$, p_i (wie AL_n)
AL Junktoren $\wedge, \vee, \neg$ wie üblich
modale Quantifizierung: $\Box_a\varphi$, $\Diamond_a\varphi$ für jedes $a \in \Sigma$

Semantik von $\mathrm{ML}(S)$ als Fragment von $\mathrm{FO}(S)$:

$$\Box_a\varphi(x) \equiv \forall y\big(E_axy \to \varphi(y)\big) : \quad \forall y\big((x \xrightarrow{a} y) \to \varphi(y)\big)$$
$$\Diamond_a\varphi(x) \equiv \exists y\big(E_axy \wedge \varphi(y)\big) : \quad \exists y\big((x \xrightarrow{a} y) \wedge \varphi(y)\big)$$

ML-Spiel: Bisimulation

Konfigurationen:
$(\mathcal{Q}, q; \mathcal{Q}', q')$ mit je *einem* markierten Zustand

Zugabtausch in einer Runde:
I bewegt Spielstein längs einer E_a-Kante in $\mathcal{Q}$ oder in $\mathcal{Q}'$
II antwortet in der anderen Struktur
von $(\mathcal{Q}, q; \mathcal{Q}', q')$ zu Nachfolgekonfiguration $(\mathcal{Q}, r; \mathcal{Q}', r')$
mit $(q, r) \in E_a^{\mathcal{Q}}$ und $(q', r') \in E_a^{\mathcal{Q}'}$

Gewinnbedingung:
I/**II** verlieren wenn sie nicht ziehen können
II verliert wenn sich aktuelle Positionen atomar unterscheiden

Ehrenfeucht-Fraïssé Satz für ML:

II hat Gewinnstrategie in $G^n_{\mathrm{ML}}(\mathcal{Q}, q; \mathcal{Q}', q')$
gdw. $\mathcal{Q}, q \equiv^{\mathrm{ML}}_n \mathcal{Q}', q'$

Modallogik und Bisimulation

Bisimulationsspiel:
unbeschränktes (unendliches) ML-Spiel $G^\infty_{\mathrm{ML}}(\mathcal{Q}, q; \mathcal{Q}', q')$

beschreibt vollständige Prozess-Äquivalenz / mehr als $\equiv^{\mathrm{ML}}$

zentrale Resultate:

- ML-Formeln unterscheiden nicht zwischen bisimulationsäquivalenten Situationen
- über endlich verzweigten Systemen fällt ML-Äquivalenz mit Bisimulationsäquivalenz zusammen (Hennessy-Milner)
- ML erfasst genau diejenigen FO-Eigenschaften, die Bisimulationsäquivalenz respektieren (van Benthem)

Wiederholung – was Sie unbedingt wissen/können müssen

Formalismen

Syntax (AL, FO, Formeln, Terme, freie Variablen, etc.)

Normalformen (DNF, KNF, pränexe Normalform)
syntaktische Manipulationen: Substitution, Skolemisierung

Beweiskalküle (Resolutionsmethode, Sequenzenregeln)

Inhaltliches Verstehen

Semantik von Formeln, Modellbeziehung

Formeln lesen können, Terme/Formeln in Strukturen auswerten

Formalisierungen in AL und FO angeben

semantische Beziehungen: Äquivalenzen, Folgerungsbeziehung, Erfüllbarkeitsäquivalenz
semantische Kriterien: Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, Korrektheit, ...

Wiederholung

zentrale Begriffe/Konzepte inhaltlich beherrschen
im Kontext sinnvoll anwenden
zentrale Sätze und Resultate: kennen
interpretieren
anwenden

zentrale Sätze

Kompaktheit (Endlichkeitssätze),
Herbrand-Modelle,
Reduktionen von FO auf AL,
Korrektheits- und Vollständigkeitsaussagen zu Kalkülen
Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit

Wiederholung: Beispiele

AL-Formeln auswerten (systematisch: Wahrheitstafel)

AL-Formeln auf Folgerung bzw. Äquivalenz untersuchen

natürlichsprachliche Bedingungen in AL formalisieren

Unerfüllbarkeit mittels Resolution nachweisen
Allgemeingültigkeit formal im Sequenzenkalkül nachweisen

Folgerungsbeziehungen reduzieren auf
Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit

Kompaktheitssatz anwenden

Kalküle rechtfertigen (z.B. Korrektheit von Regeln)

Wiederholung: Beispiele

Umgang mit Strukturen
auch spezielle Strukturen und Klassen wie z.B.
Graphen, Transitionssysteme, relationale DB-Strukturen,
Wortmodelle, linear-temporale Abfolgen, $\mathcal{N}$

Auswerten von Termen und Formeln in Strukturen

PNF, Skolemisieren, Substitutionen ausführen

Herbrandmodelle beschreiben/untersuchen

Unerfüllbarkeit durch Reduktion auf AL nachweisen

GI-Resolution und Sequenzenkalkül in Beispielen

etc.

entscheidbar? rekursiv aufzählbar? → Übung G1

$\mathrm{SAT}(\mathrm{AL}) := \{\varphi \in \mathrm{AL} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$

$\mathrm{FOLG}(\mathrm{AL}) := \{(\varphi, \psi) \in \mathrm{AL} : \varphi \models \psi\}$

$\mathrm{SAT}(\mathrm{FO}) := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$

$\mathrm{VAL}(\mathrm{FO}) := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ allgemeingültig}\}$

$\mathrm{UNSAT}(\mathrm{FO}) := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ unerfüllbar}\}$

$\mathrm{FINSAT}(\mathrm{FO}) := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ hat ein endliches Modell}\}$

$\mathrm{INFVAL}(\mathrm{FO}) := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ im Unendlichen allgemeingültig}\}$

$\mathrm{INF}_0(\mathrm{FO}) := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ in unendlichen Modellen erfüllbar}\}$

$\mathrm{INF}_1(\mathrm{FO}) := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ nur in unendlichen Modellen erfüllbar}\}$

$\mathrm{INF}_2(\mathrm{FO}) := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ hat beliebig große endliche Modelle}\}^{**}$

- Beispiele von Sätzen in/außerhalb?
  Inklusionen, Komplementbeziehungen, ...

FO-ausdrückbar in Graphen? → Übung G2

- Distanz gerade oder unendlich (d.h., nicht endlich und gerade)

- Kreisfreiheit
- Existenz eines Kreises

- uniform unendlicher Grad
- endlicher Grad
- uniform Grad 7

Herbrand-Modelle – Nichtstandard-Modelle → Übung G6

Kann man die Klasse der Herbrand-Modelle einer gegebenen Satzmenge in FO axiomatisieren?

Kann man in FO-Satzmenge die Forderung spezifizieren, dass jedes Element der Trägermenge durch eine variablenfreien Term addressiert wird?

Kann die Menge der in einem Modell der Arithmetik durch variablenfreie Terme addressierten Elemente durch eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(S_{ar})$ definierbar sein?

$(*)$ Kann man in $\mathrm{MSO}(S_{ar})$ das Standardmodell der Arithmetik bis auf Isomorphie axiomatisieren?

Ist die Menge der Primzahlen im Standardmodell der Arithmetik durch eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(S_{ar})$ definierbar? In welchem Sinne gibt es in Nichtstandard-Modellen unendliche Primzahlen?

Was stimmt hiervon?

Man kann die Erfüllbarkeit von AL-Formeln in DNF effizient* entscheiden.

Zu jeder AL-Formel kann man eine logisch äquivalente AL-Formel in DNF berechnen.

Erfüllbarkeit von AL-Formeln ist effizient* entscheidbar.

$*$ in Laufzeit polynomial in der Länge der gegebenen Formel

Was stimmt hiervon?

Zu jeder FO-Formel gibt es

eine { logisch äquivalente $\mathrm{FO}^{\neq}$-Formel ? / erfüllbarkeitsäquivalente $\mathrm{FO}^{\neq}$-Formel ?

eine { logisch äquivalente pränexe FO-Formel ? / logisch äquivalente universell-pränexe FO-Formel ? / erfüllbarkeitsäquivalente universell-pränexe FO-Formel ?

Wie findet man solche Formeln ggf. algorithmisch?

Was stimmt hiervon?

Man kann die Erfüllbarkeit von (universell-pränexen $=$-freien) FO-Sätzen auf ein AL-Erfüllbarkeitsproblem reduzieren.

Erfüllbarkeit von (universell-pränexen $=$-freien) FO-Sätzen ist entscheidbar.

Was stimmt hiervon?

Resolutionsalgorithmen produzieren schließlich alle Klauseln, die logische Folgerungen aus der gegebenen Klauselmenge sind.

Der (schnittfreie) AL-Sequenzenkalkül $\mathcal{K}$ erlaubt eine terminierende algorithmische Beweissuche.

Der (schnittfreie) FO-Sequenzenkalkül $\mathcal{K}$ erlaubt eine terminierende algorithmische Beweissuche.

Dialog:

A: Ich habe eine formale Spezifikation Ψ für eine Klasse von Netzwerkgraphen gefunden, die u.a. sicherstellt, dass nur *zusammenhängende* Graphen zugelassen werden!

B: Na ja, vielleicht verlangst Du ja, dass je zwei Knoten direkt verbunden sind oder Abstand $\leqslant n$ für ein festes n haben?

A: Ganz im Gegenteil: Ψ lässt beliebig große *endliche* Distanzen zwischen Knoten zu!

B: Toll, aber ist Ψ in $\mathrm{FO}(E)$ formalisierbar?

A: Daran arbeite ich gerade, vielleicht brauche ich als Hilfsrelation noch den transitiven Abschluss von E und muss den dann zusätzlich in FO spezifizieren.