Einführung in die Stochastik
Übungsblatt 11

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Schlicht
Dr. Mehdi Slassi
Dipl. Math. Andreas Fromkorth

Sommersemester 2010
25. Juni 2010

Aufgabe 11.1 — 4 Punkte

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige reelle Zufallsvariablen definiert auf dem gleichen W-Raum mit

$$\mathbf{E}X_i = 0 \text{ und } 0 < \sigma_i^2 = \mathbf{V}(X_i) < \infty \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Setze

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$P\left[\max_{1 \le k \le n} |S_k| > \epsilon\right] \le \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$

Hinweis:

$$\left[\max_{1 \le k \le n} |S_k| > \epsilon\right] = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

wobei

$$A_k = \left[|S_1| \le \epsilon, \dots, |S_{k-1}| \le \epsilon, |S_k| > \epsilon\right].$$

Zeigen Sie:

$$\mathbf{E}\left[S_n^2\right] \ge \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[S_n^2 \cdot 1_{A_k}\right]$$

und

$$\mathbf{E}\left[S_n^2 \cdot 1_{A_k}\right] = \mathbf{E}\left[S_k^2 \cdot 1_{A_k}\right] + \mathbf{E}\left[(S_n - S_k)^2 \cdot 1_{A_k}\right] \ge \epsilon^2 \cdot P(A_k).$$

Wie folgt daraus die Behauptung?

Aufgabe 11.2 — 4 Punkte

Sei S eine abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass jede Folge $(X_n)_{n \ge 0}$ von unabhängigen identisch verteilten S-wertigen Zufallsvariablen eine Markov-Kette ist.

Aufgabe 11.3 — 4 Punkte

Sei $(X_n)_{n \ge 0}$ eine Markov-Kette. Welche von den folgenden Folgen sind Markov-Ketten?

a) $(X_{n+r})_{n \ge 0}$ für $r \ge 1$

b) Die Folge von Paaren $(X_n, X_{n+1})_{n \ge 0}$.

Aufgabe 11.4 — 4 Punkte

Sei $(X_n)_{n \ge 0}$ eine Markov-Kette mit Werten in S, und sei $h : S \to T$ eine bijektive Abbildung. Zeigen Sie, dass $Y_n = h(X_n)$ eine Markov-Kette ist.

Abgabetermin: Freitag, 02. Juni 2010 vor der Vorlesung.