

# Einführung in die Stochastik

## Übungsblatt 10



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Dr. Robert Schlicht  
Dr. Mehdi Slassi  
Dipl. Math. Andreas Fromkorth

Sommersemester 2010  
14. Juni 2010

### Aufgabe 10.1

4 Punkte

Ein Glücksrad bleibt nach dem Drehen rein zufällig auf einem von insgesamt 50 Feldern stehen. Bleibt es auf einem der 10 blau gefärbten Felder stehen, so wird ein Gewinn von 5 Euro ausgezahlt. Bleibt es auf einem der 5 grün gefärbten Felder stehen, so wird ein Gewinn von 10 Euro ausgezahlt. Und bleibt es auf dem *einzig* roten Feld stehen, so wird ein Gewinn von 100 Euro ausgezahlt. Auf den übrigen 34 weiß gefärbten Feldern wird kein Gewinn ausgezahlt.

- Wie groß ist der Gewinn “im Mittel”, und wie groß ist die “mittlere quadratische Abweichung” zwischen dem zufälligen Gewinn und dem Gewinn “im Mittel” ?
- Für einmaliges Drehen verlangt der Besitzer des Glücksrads einen Einsatz von 5 Euro. Damit beträgt sein Verdienst bei einmaligen Drehen  $Y = 5 - X$ , wobei  $X$  der ausgezahlte Gewinn ist. Wie groß ist sein Verdienst “im Mittel”, und wie groß ist die “mittlere quadratische Abweichung” zwischen dem zufälligen Verdienst und dem Verdienst “im Mittel”?
- Der Besitzer betreibt sein Glücksrad einen Monat lang auf einem Jahrmarkt. In dieser Zeit drehen dabei  $n = 6000$  Personen (unbeeinflusst voneinander) am Glücksrad. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes eine untere Schranke für den Verdienst des Besitzers in diesem Monat, die (ungefähr) mit Wahrscheinlichkeit 0.95 überschritten wird.

**Hinweise:** Seien  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit  $P_{Y_i} = P_Y$  ( $i = 1, \dots, n$ ), wobei  $Y$  die in b) eingeführte ZV ist. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes  $x \in \mathbb{R}$  so, dass gilt:

$$P\left[\sum_{i=1}^n Y_i \geq x\right] \approx 0.95.$$

### Aufgabe 10.2

4 Punkte

Ein Eremit am Südpol hat sich für die einbrechende polare Nacht mit 24 Glühbirnen eingedeckt. Da er sich im Dunkeln unwohl fühlt, will er, dass zu jeder Zeit des halben Nachtjahres eine Birne brennt. Sollte die aktuelle Birne durchbrennen, wird er sie sofort auswechseln. Die polare Nacht dauert 4400 Stunden und der Hersteller der Glühbirnen hat eine exponentialverteilte Haltbarkeit seiner Produkte mit Parameter  $\lambda = 1/200$  zugesichert. Während der Eremit die erste Birne einschraubt, beginnen Zweifel an ihm zu nagen. . .

- Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Haltbarkeit einer solchen Glühbirne.
- Sei  $X_i$  Zufallsvariable, die die Lebensdauer der  $i$ -ten Birne beschreibt. Dann ist

$$Z := \sum_{i=1}^{24} X_i$$

die Zufallsvariable, die den Zeitpunkt beschreibt, an dem die letzte Birne durchbrennt. Bestimmen Sie auch hiervon Erwartungswert und Varianz.

- Brennend interessiert den Eremiten die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihm vor Ende der Polarnacht die Glühbirnen ausgehen könnten. Berechnen Sie diese näherungsweise mit dem zentralen Grenzwertsatz.

---

**Aufgabe 10.3****4 Punkte**

Ein Flugunternehmen weiß aus Erfahrung, dass im Mittel 7% derjenigen Personen, die ein Flugticket erworben haben, nicht bzw. zu spät zum Abflug erscheinen. Um die Zahl der somit ungenutzten Plätze nicht zu groß werden zu lassen, werden daher für einen Flug, bei dem 240 Plätze zu Verfügung stehen, mehr als 240 Flugtickets verkauft.

Wieviele Flugscheine dürfen höchstens verkauft werden, dass mit Wahrscheinlichkeit größer oder gleich 0.99 alle rechtzeitig zum Abflug erscheinenden Personen, die ein Flugticket haben, auch einen Platz im Flugzeug bekommen ?

**Hinweis** Betrachten Sie unabhängige  $b(1, p)$ -verteilte Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ . Dabei gelte  $X_i = 1$  genau dann, falls die Person, die das  $i$ -te Flugticket gekauft hat, (rechtzeitig) zum Abflug erscheint und  $n$  ist die Anzahl der verkauften Flugtickets. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes näherungsweise das größte  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$P \left[ \sum_{i=1}^n X_i \leq 240 \right] \geq 0.99.$$

---

**Aufgabe 10.4****4 Punkte**

Bestimmen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes Näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 10000 Würfeln mit einem Laplacewürfel das arithmetische Mittel der Augenzahlen um höchstens 0.035 vom Wert 3.5 abweicht.

**Einige Werte der Verteilungsfunktion ( $\Phi$ ) der Standardnormalverteilung:**

|           |     |      |      |      |      |      |      |      |       |      |      |       |
|-----------|-----|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|------|-------|
| $x$       | 0   | 0.13 | 0.26 | 0.42 | 0.53 | 0.85 | 1.29 | 1.65 | 1.96  | 2.05 | 2.33 | 2.58  |
| $\Phi(x)$ | 0.5 | 0.55 | 0.6  | 0.66 | 0.7  | 0.8  | 0.9  | 0.95 | 0.975 | 0.98 | 0.99 | 0.995 |

---

**Fussballspiel**

Habt ihr Lust den Mitarbeitern zu zeigen, dass ihr auch auf dem Fussballfeld richtig was zu bieten habt?

Dann nutzt die Chance beim Spiel "Mitarbeiter vs. Studenten" am 08. Juli um 16:00 Uhr.

Weiter Infos und Anmelde Listen liegen im 2. Stock des S2|15 aus.

---

**Abgabetermin:** Freitag, 25. Juni 2010 vor der Vorlesung.