

Einführung in die Stochastik

Übungsblatt 8



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Schlicht
Dr. Mehdi Slassi
Dipl. Math. Andreas Fromkorth

Sommersemester 2010
27. Mai 2010

Aufgabe 8.1

4 Punkte

Zehn perfekten Schützen stehen zehn unschuldige Enten gegenüber. Jeder Schütze wählt zufällig und unbeeinflusst von den anderen Schützen eine Ente aus, auf die er schießt. Sei X die zufällige Zahl der überlebenden Enten. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X .

Hinweis: Man kann die Zufallsvariable X schreiben als

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i, \text{ wobei } X_i = \begin{cases} 1 & \text{Ente } i \text{ überlebt,} \\ 0 & \text{Ente } i \text{ nicht überlebt,} \end{cases}$$

Aufgabe 8.2

4 Punkte

Bei der Beladung eines LKW mit Kisten muss darauf geachtet werden, dass das Gewicht der Ladung höchstens 7.8 Tonnen beträgt. Die Gewichte [in kg] der einzelnen Kisten sollen durch unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n beschrieben werden, für die folgende Dichte angenommen wird:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{für } 105 \leq x \leq 135 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie das Durchschnittsgewicht und die Varianz des Gewichts einer einzelnen Kiste.
- Bestimmen Sie mittels der Ungleichung von Tschebyscheff eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht von $n = 64$ dieser Kisten zwischen 7.56 Tonnen und 7.8 Tonnen liegt.

Aufgabe 8.3

4 Punkte

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige, identisch verteilte und reellwertige Zufallsvariablen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n . Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen

$$Y = \max \{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{und} \quad Z = \min \{X_1, \dots, X_n\}.$$

Aufgabe 8.4

4 Punkte

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien X, X_1, X_2, \dots reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Zeigen Sie: Aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} [|X_n - X| > \varepsilon] < \infty$$

für jedes $\varepsilon > 0$ folgt

$$X_n \rightarrow X \quad f.s.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Borel-Cantelli.

Abgabetermin: Freitag, 11. Juni 2010 vor der Vorlesung.