Einführung in die Stochastik
Übungsblatt 6

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Schlicht
Dr. Mehdi Slassi
Dipl. Math. Andreas Fromkorth

Sommersemester 2010
25. Mai 2010

Aufgabe 6.1 — 4 Punkte

Eine Versicherung investiert einen Teil ihrer Rücklagen in einen Immobilienfond. Aus Erfahrung weiß die Versicherung, dass der für 1 Euro erzielte zukünftige Erlös beschrieben wird durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{10} \cdot x^2 & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{10-x}{45} & 1 < x \leq 10, \\ 0 & x < 0 \text{ oder } x > 10. \end{cases}$$

a) Wie groß ist der "mittlere" zukünftige Erlös, und wie groß ist die "mittlere" quadratische Abweichung zwischen dem zukünftigen Erlös und diesem Wert ?
Hinweis: Die mittlere quadratische Abweichung ist gegeben durch

$$E\left((X - EX)^2\right).$$

b) In der Bilanz des Unternehmens kann der heutige Wert der Investition eines Euros in den Immobilienfond berücksichtigt werden durch den *Value at Risk*, d.h. durch denjenigen Wert, den der zukünftige Erlös genau mit Wahrscheinlichkeit 0.95 überschreitet. Bestimmen Sie diesen Wert.

c) Statt dem Value at Risk wird nun der Wert 0.8 in der Bilanz des Unternehmens zur Beschreibung des heutigen Wertes der Investition eines Euros in den Immobilienfond verwendet. Um eine Aussage darüber zu bekommen, wie stark dieser Wert im Mittel unterschritten wird, falls der Fall eintritt, dass er wirklich unterschritten wird, kann der sogenannte *expected shortfall* berechnet werden. Dies ist der mittlere Wert von X der sich ergibt, falls 0.8 unterschritten wird. Bestimmen Sie den *expected shortfall*.

Aufgabe 6.2 — 4 Punkte

a) Sei X ein Cauchy-verteilte Zufallsvariable, d.h. X hat die Dichte

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}.$$

Zeigen Sie:

1. Die Dichte von X ist symmetrisch zur y-Achse.
2. Der Erwartungswert von X existiert nicht.

b) Sei Y eine Zufallsvariable mit $E|Y| < \infty$ und einer zur y-Achse symmetrischen Dichte g. Zeigen Sie, dass dann

$$E(Y) = 0$$

gilt.

Aufgabe 6.3 — 4 Punkte

Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-2x^2), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: Durch F wird eine Verteilungsfunktion definiert.

b) Bestimmen Sie eine Abbildung

$$T :]0,1[\to \mathbb{R},$$

so dass $T(U)$ die Verteilungsfunktion F hat, wenn U eine auf dem Interval $]0,1[$ gleichverteilte Zufallsvariable ist.

Aufgabe 6.4 — 4 Punkte

Seien X und Y reellwertige Zufallsvariablen mit existierenden Erwartungswerten definiert auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Weiter sei $B \in \mathscr{A}$ mit $P(B) > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $E(X + Y|B) = E(X|B) + E(Y|B)$

b) $E(\lambda \cdot X|B) = \lambda \cdot E(X|B)$

Abgabetermin: Freitag, 28. Mai 2010 vor der Vorlesung.