Einführung in die Stochastik
Übungsblatt 4

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Schlicht
Dr. Mehdi Slassi
Dipl. Math. Andreas Fromkorth

Sommersemester 2010
6. Mai 2010

Aufgabe 4.1 — 4 Punkte

Beim Roulettespiel wird zufällig eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ ausgewählt. Dabei sind die Zahlen zusätzliche mit Farben markiert: Die Null ist grün, die Zahlen

$$2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35$$

sind schwarz und die restlichen Rot. Wir betrachten die Spielstrategie: Setzen auf Rot. Gewinnen wir (d.h. eine rote Zahl wird ausgewählt) erhalten wir den doppelten Einsatz. Wird eine schwarze Zahl gewählt, verlieren wir das eingesetzte Geld. Im Falle der Null existieren verschiedene Spielarten. Wir gehen hier davon aus, dass man die Hälfte des Einsatzes verliert.

a) Definieren Sie zur Modellierung dieses Zufallsexperiments einen Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $\Omega = \{0, \ldots, 36\}$.

b) Definieren Sie mit der Grundmenge aus Teil (a) eine Zufallsvariable X, die den Gewinn (bzw. Verlust) für den Einsatz von einer Geldeinheit auf Rot modelliert.

c) Berechnen Sie für die Zufallsvariable X aus Aufgabenteil (b) die Wahrscheinlichkeit

$$P(X < 0).$$

Aufgabe 4.2 — 4 Punkte

Sei P ein auf der Borelschen σ-Algebra definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß. Die zu P gehörende Verteilungsfunktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

wird definiert durch

$$F(x) = P((-\infty, x]) \ (x \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass gilt:

a) $F(x) \in [0, 1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) F ist monoton nichtfallend, d.h. aus $x_1 \leq x_2$ folgt $F(x_1) \leq F(x_2)$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

d) F ist rechtsseitig stetig, d.h. $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} F(y) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis zu c) und d): Wenden Sie Aufgabe 3.2 an. Die Schreibweise $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ bdeutet, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$, wobei $a, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Aufgabe 4.3 4 Punkte

Sei die Zufallsvariable X gleichverteilt auf dem Intervall $[0,2]$. Die Zufallsvariable Y ist definiert durch

$$Y = X^2.$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Y.

b) Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariable Y.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P\{Y \in (1,2]\}$.

Aufgabe 4.4 4 Punkte

Eine Versicherung investiert einen Teil ihrer Rücklagen in einen Immobilienfond. Aus Erfahrung weiß die Versicherung, dass der für 1 Euro erzielte zukünftige Erlös beschrieben wird durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{9}{10} \cdot x^{-2} & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

a) Bestimmen und skizzieren Sie die zur Dichte f gehörende Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

b) Berechnen Sie (Skizze von F verwenden!) den Value at Risk, d.h. denjenigen Wert $VaR \in \mathbb{R}$, für den gilt

$$F(VaR) = 0.05.$$

c) Interpretieren Sie den VaR anschaulich.
Hinweis: Ist X stetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte f, was gilt dann für die Wahrscheinlichkeiten

$$P[X \leq VaR] \text{ bzw. } P[X > VaR]?$$

Abgabetermin: Freitag, 14. Mai 2010 vor der Vorlesung.