Einführung in die Stochastik
Übungsblatt 3

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Schlicht
Dr. Mehdi Slassi
Dipl. Math. Andreas Fromkorth

Sommersemester 2010
30. April 2010

Aufgabe 3.1 — 4 Punkte

Student S. hat die Zahlenkombination des Schlosses seines Koffers vergessen. Damit sich das Schloss öffnen lässt, müssen drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ jeweils richtig eingegeben werden. Student S. versucht, das Schloss durch sukzessives Ausprobieren von rein zufällig gewählten Ziffernfolgen bestehend aus drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ zu öffnen. Da er ein schlechtes Gedächtnis hat, kann er sich die bisher eingegebenen Ziffernfolgen nicht merken, so dass er unter Umständen mehrmals die gleiche Ziffernfolge eingibt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei rein zufälligem Raten *einer* Ziffernfolge bestehend aus drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ die richtige Ziffernkombination zu erhalten?

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. genau bei der k–ten Eingabe einer Ziffernfolge zum ersten Mal die richtige Ziffernkombination eingibt?

Hinweis: Betrachten Sie das k–malige Werfen eines Würfels mit 1000 Seiten, die mit den Zahlen 1 bis 1000 beschriftet sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel beim k–ten Wurf zum ersten Mal mit 1 oben landet?

c) Wie oben beschrieben versucht Student S. nun, dass Schloss durch sukzessive Eingabe von rein zufällig gewählten Ziffernfolgen zu öffnen. Für das Einstellen einer Ziffernfolge und das Probieren, ob sich das Schloss öffnet, benötigt Student S. 15 Sekunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. das Schloss innerhalb von zwei Stunden öffnen kann?

Aufgabe 3.2 — 4 Punkte

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein W–Raum.

a) Zeigen Sie: Für alle $A, A_n \in \mathscr{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

(sog. Stetigkeit von unten des W–Maßes P).

Hinweis zu a): Auf

$$A = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})$$

P anwenden, die σ–Additivität von P ausnützen und

$$A_N = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{N} (A_n \setminus A_{n-1})$$

benützen.

b) Zeigen Sie: Für alle $A, A_n \in \mathscr{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

(sog. Stetigkeit von oben des W-Maßes P).

Hinweis zu b): Wenden Sie a) auf $\Omega \setminus A_1$, $\Omega \setminus A_2, \ldots$ an.

Aufgabe 3.3 — 4 Punkte

a) (Erstes Lemma von Borel und Cantelli)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(A_n)_n$ eine Folge von Ereignissen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

Beweisen Sie, dass dann gilt

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) \le P(\cup_{k=N}^{\infty} A_k) \ (N \in \mathbb{N})$$

und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit rechts mit Hilfe der σ-Subadditivität ab.

b) Dozent K. fragt in jeder seiner mündlichen Prüfungen nach dem ersten Lemma von Borel und Cantelli. Da die Studenten sich untereinander absprechen, kann der n-te Prüfling die Frage nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n^2}$ nicht richtig beantworten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei sukzessiver Durchführung von unendlich vielen Prüfungen nur endlich viele der Prüflinge diese Frage nicht richtig beantworten?
Hinweis: Wenden Sie a) mit A_n="Prüfling n beantwortet die Frage nicht richtig" an.

Aufgabe 3.4 — 4 Punkte

Student S. vermutet, dass die zufällige Zeit (in Minuten), die Dozent K. bei seiner Statistik Vorlesung immer zu früh kommt, durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß beschrieben wird, dass eine Dichte der Form

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{fuer} \quad 0 \le x \le \alpha, \\ 0 & \text{fuer} \quad x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

besitzt. Hierbei sind $\alpha, \beta > 0$ Parameter der Dichte.
a) Welche Beziehung muss zwischen α und β bestehen, damit f wirklich Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist?
b) Bestimmen Sie für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$ die zu f gehörende Verteilungsfunktion, d.h. die durch

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

definierte Funktion F.
c) Skizzieren Sie die Graphen von f und F für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.
d) Sei wieder $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$. Wie groß ist – sofern f wirklich die zufällige Zeit beschreibt, die Dozent K. zu früh kommt – die Wahrscheinlichkeit, dass Dozent K.

- weniger als zwei Minuten zu früh kommt?
- mehr als zehn Minuten zu früh kommt?

Abgabetermin: Freitag, 07. Mai 2010 vor der Vorlesung.