Einführung in die Stochastik
Übungsblatt 8

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Schlicht
Dr. Mehdi Slassi
Dipl. Math. Andreas Fromkorth

Sommersemester 2010
4. Juni 2010

Aufgabe 8.1 (Lösungsvorschlag)

Da jeder Schütze zufällig und unbeeinflusst von den anderen Schützen die Ente auswählt, auf die er schießt, gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_i = 1\} &= \mathbf{P}\{\text{Schütze 1 ziehlt nicht auf Ente i}, \ldots, \text{Schütze n ziehlt nicht auf Ente i}\}\\ &= \prod_{j=1}^{10} \mathbf{P}\{\text{Schütze j ziehlt nicht auf Ente i}\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\mathbf{E}(X_i) = 0 \cdot \mathbf{P}\{X_i = 0\} + 1 \cdot \mathbf{P}\{X_i = 1\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}.$$

Wegen der Linearität des Erwartungswerts erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i)\\ &= 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 3.49.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2.$$

Da wir $\mathbf{E}X$ schon kennen, genügt es also $\mathbf{E}(X^2)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^2) &= \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} X_i X_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{E}(X_i X_j) + \sum_{j=i+1}^{10} \mathbf{E}(X_i X_j)\right) + \sum_{i=1}^{10} \mathbf{E}(X_i^2)\\ &= 90 \cdot \mathbf{E}(X_1 X_2) + 10 \cdot \mathbf{E}(X_1^2).\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit das ein fest gewählter Schütze weder auf die erste noch auf die zweite Ente zielt ist $\frac{8}{10}$. Da die Schützen sich unabhängig voneinander entscheiden, auf welche Ente sie zielen, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$\left(\frac{8}{10}\right)^{10}$$

für das Ereignis „Keiner der Schützen zielt auf Ente 1 oder Ente 2 " .

$$\mathbf{E}(X_1 X_2) = 1 \cdot \mathbf{P}[X_1 \cdot X_2 = 1] = \left(\frac{8}{10}\right)^{10}.$$

Da X_1 nur die Werte Eins und Null annimmt, ist $\mathbf{E}(X_1^2) = \mathbf{E}(X_1) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$. Wir erhalten also

$$\mathbf{Var}(X) = 90 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{10} + 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} - \left(10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right)^2 \approx 0.99.$$

Aufgabe 8.2 (Lösungsvorschlag)

(a) Das Gewicht einer einzelnen Kiste kann durch eine Zufallsvariable X beschrieben werden, die $R(105, 135)$ (Rechteckverteilung) verteilt ist. Es gilt:

- $E(X) = \dfrac{105 + 135}{2} = 120$
- $Var(X) = \dfrac{(135 - 105)^2}{12} = 75$

(b) Sei $Y = X_1 + \cdots X_{64}$ die Zufallsvariable, die das Gesamtgewicht von 64 Kisten beschreibt. Dann ist

- $E(Y) = \sum_{i=1}^{64} E(X_i) = 64 \cdot E(X) = 64 \cdot 120 = 7680$
- $Var(Y) = \sum_{i=1}^{64} Var(X_i) = 64 \cdot Var(X) = 64 \cdot 75 = 4800$

(Man beachte dabei die Unabhängigkeit und die identische Verteilung der X_i.)
Gesucht ist nun

$$
\begin{aligned}
P(7560 \le Y \le 7800) &= P(-120 \le Y - 7680 \le 120) \\
&= P(-120 \le Y - E(Y) \le 120) \\
&= P(|Y - E(Y)| \le 120) \\
&= 1 - P(|Y - E(Y)| \ge 120) \\
&\ge 1 - \frac{Var(Y)}{120^2} \qquad \text{Ungleichung von Tschebycheff} \\
&= 1 - \frac{4800}{120^2} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8.3 (Lösungsvorschlag)

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\{\max\{X_1, \ldots, X_n\} \le t\} &= \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \le t\} &(1)\\
(\{\min\{X_1, \ldots, X_n\} \le t\})^C &= \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i \le t\}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (\{X_i \le t\})^C &(2)
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{Y \le t\} &= \mathbf{P}\{\max\{X_1, \ldots, X_n\} \le t\} \overset{(1)}{=} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \le t\}\right) \\
&\overset{X_1,\ldots,X_n \text{ unabhängig}}{=} \prod_{1=1}^{n} \mathbf{P}\{X_i \le t\} = \prod_{1=1}^{n} F_i(t)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{Z \le t\} &= \mathbf{P}\{\min\{X_1, \ldots, X_n\} \le t\} = 1 - \mathbf{P}\left(\{\min\{X_1, \ldots, X_n\} \le t\}^C\right) \\
&\overset{(2)}{=} 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \le t\}^C\right) \\
&\overset{X_1,\ldots,X_n \text{ unabhängig}}{=} 1 - \prod_{1=1}^{n} \mathbf{P}\left(\{X_i \le t\}^C\right) = 1 - \prod_{1=1}^{n} (1 - F_i(t)).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8.4 (Lösungsvorschlag)

Für $l \in \mathbb{N}$ gilt nach Voraussetzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left[|X_n - X| > \frac{1}{l}\right] < \infty.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli folgt daraus

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left[|X_k - X| > \frac{1}{l}\right]\right\} = 0.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left[|X_k - X| > \frac{1}{l}\right]\right\} \\ &\geq \mathbf{P}\left\{\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left[|X_k - X| > \frac{1}{l}\right]\right\} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Das zum Ereignis in obiger Wahrscheinlichkeit komplementäre Ereignis

$$A := \left(\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left[|X_k - X| > \frac{1}{l}\right]\right)^c$$

hat also Wahrscheinlichkeit Eins. Nach der Regel von de Morgan gilt

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left[|X_k - X| \leq \frac{1}{l}\right].$$

Wir zeigen nun, dass für $\omega \in A$ die Beziehung

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \qquad (n \to \infty)$$

gilt. Dazu beachten wir, dass für $\omega \in A$ für jedes $l \in \mathbb{N}$

$$|X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{l} \text{ für } k \text{ genügend groß}$$

erfüllt ist, was

$$\limsup_{k\to\infty} |X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{l}$$

für jedes $l \in \mathbb{N}$ bzw.

$$\limsup_{k\to\infty} |X_k(\omega) - X(\omega)| = 0$$

impliziert. Damit haben wir

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \qquad (n \to \infty)$$

für $\omega \in A$, woraus wegen $\mathbf{P}(A) = 1$ die Behauptung folgt.